

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

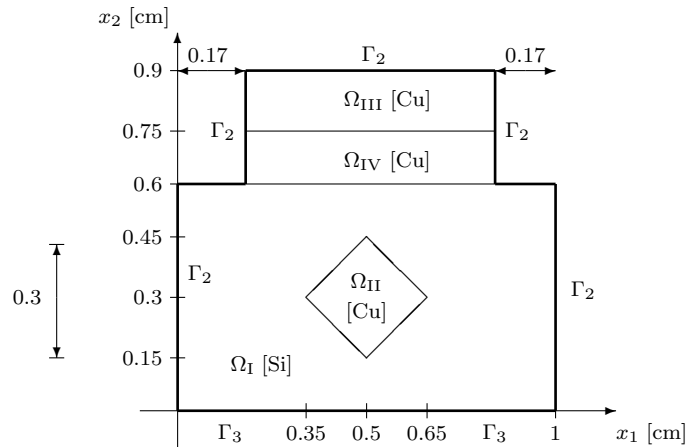
PS II

03.11. 2017 (Zeit : 10¹⁵ – 11⁴⁵)

Raum : K 223B : 5 - 8

1.3 Wärmeleitung in einer dünnen Platte

- **Physikalisches Problem** : Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_I \cup \bar{\Omega}_{II} \cup \bar{\Omega}_{III} \cup \bar{\Omega}_{IV}$, in einer dünnen Platte „CHIP“ der Art



mit einer Plattendicke von $d = 0.01$ cm und mit den Daten

- Wärmeleitkoeffizienten

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \lambda(x) := \begin{cases} \lambda_{Si} = 0.01 \left[\frac{W}{cm K} \right], & x \in \bar{\Omega}_I \\ \lambda_{Cu} = 3.95 \left[\frac{W}{cm K} \right], & x \in \bar{\Omega}_{II} \cup \bar{\Omega}_{III} \cup \bar{\Omega}_{IV} \end{cases}$$

↑
isotrop

- $a \equiv 0$ (kein Wärmeaustausch in z-Richtung),

- Wärmequellen:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \Omega_I \cup \Omega_{III}, \\ 2^k \left[\frac{W}{cm^3} \right], & x \in \Omega_{II}, \\ -0.4545454 \cdot 2^k \left[\frac{W}{cm^3} \right], & x \in \Omega_{IV}, \end{cases}$$

wobei $k =$ letzte Ziffer der Matrikelnummer $\in \{0, 1, \dots, 9\}$,

– Randbedingungen (RB) auf $\Gamma \equiv \partial\Omega = \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$:

1. $\Gamma_1 = \emptyset$ (keine RB 1. Art),

2. $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma \setminus \Gamma_3$: $\frac{\partial u}{\partial N} = g_2 := 0$ auf Γ_2 ,

3. $\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$: $\frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(g_3 - u)$ auf Γ_3

mit $g_3 = 300 \text{ K}$, $\alpha = 0.2 [W/(cm^2 K)]$.

5 Man leite die stationäre Wärmeleitgleichung zur Bestimmung der Temperaturverteilung $u(x)$ in der **integralen Form** (= Bilanzform) her.

6 Geben Sie die **klassische Formulierung**, d.h. die PDgl. in $\Omega_I, \Omega_{II}, \Omega_{III}$ und Ω_{IV} , Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_I \cap \bar{\Omega}_{II}$ und $\bar{\Omega}_I \cap \bar{\Omega}_{IV}$ sowie die Randbedingungen an.

7 Leiten Sie die **Variationsformulierung** in der Form

$$\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}_0, \quad (1.1)$$

$$\text{d.h., } \mathbf{V}_g = ?$$

$$\mathbf{V}_0 = ?$$

$$a(u, v) = ?$$

$$\langle F, v \rangle = ?$$

her.

8 Man zeige, dass eine hinreichend glatte (genau Angabe der geforderten Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften) Lösung $u \in \mathbf{V}_g$ des Variationsproblems (1.1) das klassische Randwertproblem (d.h. PDgl. in $\Omega_I, \Omega_{II}, \Omega_{III}$ und Ω_{IV} ; Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_I \cap \bar{\Omega}_{II}$ und $\bar{\Omega}_I \cap \bar{\Omega}_{IV}$; Randbedingungen) löst !