

# P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

## “Mathematische Modelle in der Technik”

**PS I**      20.10.2017 (Zeit : 10<sup>15</sup> – 11<sup>45</sup>)      Raum : K 223B : **1** - **4**

### 1 Wärmeleit- und Wärmetransportprobleme

#### 1.1 Analytische Hilfsmittel

**1** Man zeige, dass  
a)

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 = f(x_1, x_2, x_3)$$

gilt, falls  $f \in C(\Omega)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ ,

b)

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \left[ \sigma(\xi_1, \xi_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}) - \sigma(\xi_1, \xi_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}) \right] d\xi_2 d\xi_1 = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_3}$$

gilt, falls  $\sigma \in C^1(\Omega)$ .

c) Wie kann man die Voraussetzungen an  $f$  in a) bzw. an  $\sigma$  in b) abschwächen ?

#### 1.2 Analytische Lösung und Parameterstudien

**2** Berechnen Sie analytisch das Temperaturfeld  $u(\cdot)$  gemäss der Wärmeleitgleichung (1.5) aus der Vorlesung für die Daten:

$a = 0, b = 1, \eta \in (0, 1)$  fix,  $q = 0, f = 0, g_a = 0, g_b = 1$  und

$$\lambda(x) := \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \text{const} > 0 \text{ für } x < \eta \\ \lambda_2 = \text{const} > 0 \text{ für } x > \eta \end{array} \right\}$$

mit  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$  !

Führen Sie Parameterstudien mit dem Wärmeleitkoeffizienten durch:

a)  $\lambda_2 \rightarrow 0$

b)  $\lambda_1 \rightarrow \infty$

- 3 Wir betrachten wieder das Wärmeleitproblem aus 2 aber jetzt mit freiem Wärmeübergang an den Randpunkten

$$\begin{aligned}\lambda_1 u'(a) &= \alpha_a u(a) \\ -\lambda_2 u'(b) &= \alpha_b (u(b) - 1)\end{aligned}$$

mit positiven Wärmeübergangszahlen  $\alpha_a$  und  $\alpha_b$ . Berechnen Sie wieder analytisch das Temperaturfeld  $u(\cdot)$  und führen Sie jetzt Parameterstudien mit der Wärmeübergangszahl  $\alpha$  durch:

a)  $\alpha_a \rightarrow \infty$

b)  $\alpha_b \rightarrow \infty$

- 4 Bestimmen Sie die von einem (fixierten) Parameter  $y \in (0, 1)$  abhängige Lösung  $u_y(\cdot)$  der Randwertaufgabe (Wärmeleitproblem mit Punktquelle)

$$\begin{aligned}-u''(x) &= \delta(x - y), \quad x \in (0, 1) & (f_y = 1), \\ u(0) &= u(1) = 0,\end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy, \quad x \in [0, 1]$$

mit  $G(x, y) := u_y(x)$  die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}-u''(x) &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0,\end{aligned}$$

wobei  $f$  eine gegebene stetige Funktion ist.