

## Prüfungsfragen und Prüfungsaufgaben

---

### Fragen 1 - 16:

1. Modellieren Sie ein örtlich eindimensionales, stationäres Wärmeleitproblem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Randbedingungen, Interfacebedingungen) !
2. Modellieren Sie ein örtlich dreidimensionales, stationäres Wärmeleitproblem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Randbedingungen, Interfacebedingungen) !
3. Modellieren Sie ein örtlich eindimensionales, instationäres Wärmeleitproblem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Anfangs- und Randbedingungen, Interfacebedingungen) !
4. Modellieren Sie ein örtlich dreidimensionales, instationäres Wärmeleitproblem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Anfangs- und Randbedingungen, Interfacebedingungen) !
5. Modellieren Sie ein örtlich dreidimensionales, instationäres Wärmeleit-Wärmetransport-Problem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Anfangs- und Randbedingungen, Interfacebedingungen) !
6. Modellieren Sie den Zugstab im statischen und im dynamischen Fall !
7. Beschreiben Sie den Spannungszustand in einem belasteten Körper im Gleichgewicht (totale Spannung, Spannungstensor, Kugeltensor, Deviator, Transformationsformel, Normal- und Tangentialspannung, Hauptspannungen, Invarianten des Spannungstensors) !
8. Leiten Sie die beschreibenden Gleichungen des statischen und dynamischen Kräfte- und Momentengleichgewichts her !
9. Beschreiben Sie den Verzerrungszustand (Greenscher Verzerrungstensor, Cauchyscher Verzerrungstensor) ! Welche geometrische Interpretation kann man den Komponenten des Verzerrungstensors geben ?
10. Leiten Sie die LAMÉschen Gleichungen aus dem Kräfte- und Momentengleichgewicht (Kinetik), den geometrischen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik) und dem HOOKEschen Gesetz ( $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ ) für isotrope, homogene Materialien im statischen Fall her ! Welche Randbedingungen sind möglich und was bedeuten sie mechanisch ?
11. Leiten Sie die NAVIER-LAMÉschen Gleichungen aus dem dynamischen Kräfte- und Momentengleichgewicht (Kinetik), den geometrischen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik) und dem HOOKEschen Gesetz ( $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ ) für isotrope, homogene Materialien im dynamischen Fall her ! Welche Rand- und Anfangsbedingungen sind möglich und was bedeuten sie mechanisch ?

12. Was verstehen Sie unter der Lagrangeschen und Eulerschen Beschreibungsweise ?
13. Geben Sie das Transport-Theorem an und beweisen Sie es im örtlich eindimensionalen ( $d = 1$ ) Fall ! Welche Anwendungen des Transport-Theorems haben Sie in der Vorlesung kennengelernt ?
14. Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung und Bewegungsgleichungen aus dem Massenerhaltungssatz und dem Impulserhaltungssatz her !
15. Leiten Sie die Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung von inkompressiblen Newtonschen Fluiden her ! Welche Rand- und Anfangsbedingungen können Sie vorschreiben ?
16. Was versteht man unter der Dimensionsanalyse und wie hängt diese mit der Ähnlichkeitstheorie zusammen ? Erläutern Sie die Ähnlichkeitstheorie an einem Beispiel !

**Aufgaben 1 - 10:**

1. Man zeige, dass

a)

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 = f(x_1, x_2, x_3)$$

gilt, falls  $f \in C(\Omega)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ ,

b)

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \left[ \sigma\left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) - \sigma\left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \right] d\xi_2 d\xi_3 = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_1}$$

gilt, falls  $\sigma \in C^1(\Omega)$ .

2. Berechnen Sie analytisch das Temperaturfeld  $u(\cdot)$  gemäss der Wärmeleitgleichung (1.5)<sub>V0</sub> aus der Vorlesung für die Daten:

$a = 0, b = 1, \eta \in (0, 1)$  fix,  $q = 0, f = 0, g_a = 1, g_b = 0$  und

$$\lambda(x) := \begin{cases} \lambda_1 = \text{const} > 0 & \text{für } x < \eta \\ \lambda_2 = \text{const} > 0 & \text{für } x > \eta \end{cases}$$

mit  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  !

Führen Sie Parameterstudien mit dem Wärmeleitkoeffizienten durch:

- a)  $\lambda_1 \rightarrow \infty$
- b)  $\lambda_2 \rightarrow 0$
- c)  $\lambda_1 = \lambda_2$
- d)  $\eta = 0, \eta = 1$

3. Bestimmen Sie die von einem (fixierten) Parameter  $y \in (0, 1)$  abhängige Lösung  $u_y(\cdot)$  der Randwertaufgabe (Wärmeleitproblem mit Punktquelle)

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \delta(x - y), \quad x \in (0, 1) & (f_y = 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy, \quad x \in [0, 1]$$

mit  $G(x, y) := u_y(x)$  die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

löst !

4. Die Bestimmung der Temperaturverteilung  $u(y)$  in einem homogenen ( $c, \rho, \lambda = \text{const.}$ ), mantelisierten, wärmequellenfreien, dünnen Draht der Länge  $l$ , der mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt wird, am linken Rand auf  $0^\circ \text{C}$  und rechten Rand auf  $1^\circ \text{C}$  gehalten wird, führt nach Skalierung  $x = y/l$  auf das Randwertproblem (siehe Vorlesung)

$$-u''(x) + pu'(x) = 0, \quad \forall x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \quad (1)$$

Bestimmen Sie  $p = p(c, \rho, \lambda, v, l) = ?$ , lösen Sie dann das Randwertproblem (1) analytisch und diskutieren Sie das Verhalten der Lösung für  $v \rightarrow \infty$  !

5. Sei  $u \in C^2(Q_T)$ ,  $f \in C(Q_T)$ ,  $E \in C^1(0, \ell)$  und  $\varrho \in C(0, \ell)$  mit  $Q_T = (0, \ell) \times (0, T)$ . Man zeige, dass dann  $x^*, x^{**}, x^{***} \in (x_1, x_2)$  und  $t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2)$  existieren, sodass die integrale Form (2.8) aus der Vorlesung zur Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x^*, t^*) \varrho(x^*) \Delta t \Delta x = \frac{\partial}{\partial x}(E(x^{**}) \frac{\partial u}{\partial x}(x^{**}, t^{**})) \Delta t \Delta x + f(x^{***}, t^{***}) \Delta t \Delta x \quad (2)$$

äquivalent ist.

6. Ein homogener Zugstab ( $\rho, E = \text{const.} > 0, u(0, t) = 0, E \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = g_l(t)$ ) werde zeit-harmonisch erregt, d.h.  $f(t) = f \exp(i\omega t)$  und  $g_l(t) = g_l \exp(i\omega t)$  mit gegebenen Amplituden  $f$  und  $g_l$  aus  $R$  und gegebener Erregerfrequenz  $\omega$ . Man suche die periodischen Lösungen und bestimme die kritischen Frequenzen (siehe auch Folie 10, Ü 2.2) !

7. Schneiden Sie virtuell einen Würfel

$$" \Delta x " := \left[ x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_1 + \frac{\Delta x_1}{2} \right] \times \left[ x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2} \right] \times \left[ x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2} \right]$$

aus einem im Gleichgewicht befindlichen Körper heraus und schreiben Sie das Kräftegleichgewicht (z.B. in  $x_1$ -Richtung) auf (siehe auch Folie 11, Ü 2.4) !

8. Man zeige, dass aus dem dynamischen Momentengleichgewicht

$$\int_{\Omega'} x \times f(x, t) dx + \int_{\partial \Omega'} x \times t^{(n)}(x, t) ds_x = \int_{\Omega'} x \times a(x, t) \rho dx \quad \forall \Omega' \quad \forall t$$

und aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht

$$\rho a - \text{div } \sigma = f \quad \text{in } Q_T = \Omega \times (0, T)$$

in differentieller Form die Symmetrie des Spannungstensors, d.h.

$$\sigma_{ij}(x, t) = \sigma_{ji}(x, t) \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T$$

folgt, wobei  $a(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$  die Beschleunigung bezeichnet !

9. Man zeige, dass die linearisierten Verzerrungen  $\varepsilon(v) = (\varepsilon_{ij}(v))$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , einer Verschiebungsfunktion  $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in [C^2(\Omega)]^3$  genau dann verschwinden (also  $\varepsilon(v) = 0$ ), wenn  $v \in \mathcal{R}$  eine (linearisierte) Starrkörperverschiebung ist, wobei der Unterraum  $\mathcal{R} := \{v(x) = a \times x + b : a, b \in R^3\}$  durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

*Hinweis:* Zeigen, und verwenden Sie  $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial \varepsilon(v)_{ij}}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial \varepsilon(v)_{ki}}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial \varepsilon(v)_{jk}}{\partial x_i}(x)$ .

10. Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall  $d = 1$ , d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[ \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(F \cdot v)}{\partial x}(x, t) \right] dx \quad !$$