Für die folgenden Aufgaben seinen zwei seperable Hilberträume V und H gegeben, mit den Eigenschaften:

- $V \subset H$ liegt dicht in H.
- Es existiert eine Konstante $c > 0$, mit

$$\|v\|_H \leq c\|v\|_V \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Wir betrachten dann das Variationsproblem: Gesucht ist $u \in H^1((0,T), V; H)$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) &= \langle F(t), v\rangle && \forall v \in V \quad \forall t \in (0,T) \text{ fast überall,} \\ u(0) &= u_0 && \text{in } H \end{aligned} \tag{11.1}$$

erfüllt ist.

49 Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $u \in H^1((0,T), V; H)$ eine Lösung von (11.1) ist, genau dann wenn $u_\lambda \in H^1((0,T), V; H)$ Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_\lambda(t), v)_H + a_\lambda(u_\lambda(t), v) &= \langle F_\lambda(t), v\rangle && \forall v \in V \quad \forall t \in (0,T) \text{ fast überall,} \\ u_\lambda(0) &= u_0 && \text{in } H \end{aligned} \tag{11.2}$$

ist, mit

$$u_\lambda(t) = e^{-\lambda t}u(t), \qquad a_\lambda(u,v) = a(u,v) + \lambda(u,v)_H, \qquad F_\lambda = e^{-\lambda t}F(t).$$

50 Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine V-beschränkte Bilinearform. Man zeige, falls eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass die Gårding-Ungleichung

$$a(v,v) + \lambda\|v\|_H^2 \geq c_1^a\|v\|_V^2 \qquad \forall v \in V,$$

erfüllt ist, dann ist das Problem (11.1) eindeutig lösbar für jedes $F \in L^2((0,T), V^*)$ und $u_0 \in H$.

Programmierteil.

---

51 Man implementiere eine Routine, die die Anwendung des MDS-Vorkonditionierers von Aufgabe 48 realisiert. Dazu stelle man für eine gegebene Hierarchie die Steifigkeitsmatrizen auf und berechne die Inverse der Diagonalmatrizen. Weiters wird die Realisierung der Transferoperatoren $I_\ell^{\ell+1}$ bzw. $I_{\ell+1}^\ell$ benötigt, siehe dazu Aufgabe 46 und Aufgabe 47.

52 Man verwende das vorkonditionierte CG-Verfahren um die linearen Gleichungssysteme von Aufgabe 37 näherungsweise zu lösen. Dazu verwende man den Vorkonditionierer von Aufgabe 51. Weiters stelle man die Anzahl der benötigten CG-Iterationen bezüglich der Dimension n_h grafisch dar.