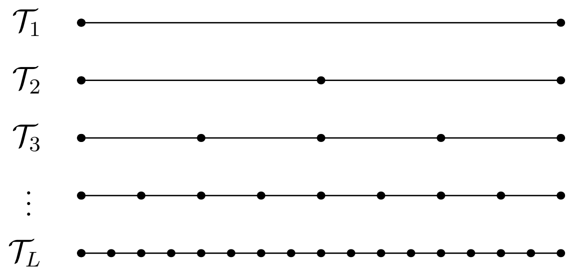
In den nächsten drei Aufgabe wird der MDS-Vorkonditionierer für das Modellproblem 1D betrachtet. Dazu seien geschachtelte Zerlegungen $\{\mathcal{T}_\ell\}_{\ell=1}^L$ des Intervalls $(0,1)$ gegeben, siehe dazu auch die Abbildung:



Für jede dieser Zerlegungen $\mathcal{T}_\ell$, $\ell = 1, \ldots, L$ betrachten wir die Ansatzräume

$$V_\ell = \{v_\ell \in \mathcal{C}[0,1] : v_{\ell|\tau} \in \mathbb{P}_1(\tau) \text{ für alle } \tau \in \mathcal{T}_\ell \text{ und } v_\ell(0) = 0\}$$

mit den jeweiligen nodalen Basisfunktionen $\{\varphi_{\ell,i}\}_{i=1}^{n_\ell}$, $n_\ell = 2^{\ell-1}$.

$\boxed{46}$ Man betrachte zwei aufeinanderfolgende Zerlegungen $\mathcal{T}_\ell$ und $\mathcal{T}_{\ell+1}$ mit den zugehörigen Ansatzräumen $V_\ell \subset V_{\ell+1}$. Man bestimme die lineare Abbildung $I_\ell^{\ell+1} \in \mathbb{R}^{n_{\ell+1} \times n_\ell}$ mit der man grobe Basisfunktionen $\varphi_{\ell,i}$, $i = 1, \ldots, n_\ell$ durch feine Basisfunktionen $\varphi_{\ell+1,j}$, $j = 1, \ldots, n_{\ell+1}$ darstellen kann, das heißt

$$\varphi_{\ell,i} = \sum_{j=1}^{n_{l+1}} I_\ell^{\ell+1}[j,i]\varphi_{\ell+1,j} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n_\ell.$$

Sei nun $v_\ell \in V_\ell \subset V_{\ell+1}$ mit dem Koeffizientenvektor $\underline{v}_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell}$ bezüglich der Basis $\{\varphi_{\ell,i}\}_{i=1}^{n_\ell}$. Man zeige weiters, dass der Koeffizientenvektor von $v_\ell \in V_{\ell+1}$ bezüglich der Basis $\{\varphi_{\ell+1,i}\}_{i=1}^{n_{\ell+1}}$ gegeben ist durch

$$\underline{v}_{\ell+1} = I_\ell^{\ell+1}\underline{v}_\ell \in \mathbb{R}^{n_{\ell+1}}.$$

$\boxed{47}$ Für $R_L \in V^*$ werden die Vektoren $\underline{r}_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell}$, $\ell = 1, \ldots, L$ definiert als

$$(\underline{r}_\ell, \underline{v}_\ell)_{\ell^2} = \langle R_L, v_\ell\rangle \qquad \text{für alle } v_\ell \in V_\ell$$

mit $v_\ell = \sum_{i=1}^{n_\ell} v_{\ell,i}\varphi_{\ell,i}$ und $\underline{v}_\ell = [v_{\ell,i}]_{i=1}^{n_\ell}$. Für $\ell \in \mathbb{N}, \ell < L$ zeige man dann den Zusammenhang

$$\underline{r}_\ell = I_{\ell+1}^\ell \underline{r}_{\ell+1} \qquad \text{mit } I_{\ell+1}^\ell := (I_\ell^{\ell+1})^\top.$$

$\boxed{48}$ Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ die Bilineaform vom Modellproblem 1D. Für einen Vektor $\underline{r}_L \in \mathbb{R}^{n_L}$ ist der MDS-Vorkonditionierer $C_L^{-1} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$ gegeben durch

$$C_L^{-1}\underline{r}_L = \underline{w}_L,$$

wobei $\underline{w}_L \in \mathbb{R}^{n_L}$ der Koeffizientenvektor der Funktion

$$w_L = \sum_{\ell=1}^L \sum_{i=1}^{n_h} w_{\ell,i}\varphi_{\ell,i} \in V_L$$

bezüglich der Basis $\{\varphi_{L,i}\}_{i=1}^{n_L}$ ist. Dabei sind die Koeffizienten $w_{\ell,i}$ gegeben über die Unterraum-Korrektur-Gleichungen

$$a(\varphi_{\ell,i}, \varphi_{\ell,i}) w_{\ell,i} = \langle R, \varphi_{\ell,i} \rangle \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n_\ell \text{ und } \ell = 1, \ldots, L.$$

Man schreibe den Vorkonditionierer C_L^{-1} in Abhängigkeit von $I_\ell^{\ell+1}$ bzw. $I_{\ell+1}^\ell$ (siehe Aufgabe 46 und Aufgabe 47) und den Diagonalmatrizen $D_\ell = \operatorname{diag}(K_\ell)$, wobei $K_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell \times n_\ell}$ die Steifigkeitsmatrix bezüglich dem Level ℓ ist.