---

40 Gegeben sei ein Lipschitz-Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^d$ mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Für das d-dimensionale Modellproblem: Gesucht ist $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + \underline{b} \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ (A(x)\nabla u(x)) \cdot \underline{n}(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

leite man eine Variationsformulierung her. Dabei sind f, g_D und g_N skalare Funktionen und $A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\underline{b} : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ genügend reguläre Koeffizienten.

41 Gegeben sei das d-dimensionale Modellproblem

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(\nabla u(x)) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ \nabla u(x) \cdot \underline{n}(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

mit $|\Gamma_D| > 0$. Für die zugehörige Variationsformulierung zeige man für $f \in L^2(\Omega)$, $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ und $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ die $H^1(\Omega)$-Beschränktheit und V_0-Elliptizität der Bilinearform $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Weiters zeige man, dass das zugehörige linear Funktional $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

42 Betrachtet werde die Funktion

$$u(x,y) = \sqrt[4]{-\log(\sqrt{x^2+y^2})}$$

auf dem zweidimensionalen Gebiet

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 0.5\}.$$

Man zeige, dass diese Funktion im Raum $H^1(\Omega)$ liegt, also $u \in H^1(\Omega)$. Ist die Funktion u stetig?

Hinweis: Man transformiere die auftretenden Integrale mit Hilfe der Polarkoordinaten und berechne die jeweiligen Normen.

43 Betrachtet werde das zweidimensionale Referenzelement

$$\hat{T} := \{\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : \xi^{(1)} > 0, \xi^{(2)} > 0 \text{ und } 1 - \xi^{(1)} - \xi^{(2)} > 0\}.$$

Für die Knoten $\xi_1 := (0,0)$, $\xi_2 := (1,0)$ und $\xi_3 := (0,1)$ bestimme man die linearen Formfunktionen $\hat{\varphi}_i : \hat{T} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ mit der Eigenschaft, dass

$$\hat{\varphi}_i(\xi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \text{für alle } i,j \in \{1,2,3\}.$$

Weiters berechne man für diese Formfunktionen die lokale Steifigkeitsmatrix

$$\hat{K} := [K_{ij}]_{i,j=1}^3, \qquad \text{mit } K_{ij} = \int_{\hat{T}} \nabla\hat{\varphi}_j \cdot \nabla\hat{\varphi}_i \mathrm{d}x \qquad \text{für } i,j \in \{1,2,3\}.$$

Programmierteil.

44 Man implementiere eine Routine, die es ermöglicht berechnete Lösungen grafisch darzustellen. Zum Beispiel kann man die Lösungen in eine Datei schreiben, die dann von einem anderen Programm eingelesen werden kann.

Eine Möglichkeit bietet das Programm "ParaView" (`http://www.paraview.org/`). Als Dateiformat empfiehlt es sich das "vtk"-Format zu verwenden, siehe `http://www.vtk.org/VTK/img/file-formats.pdf`. In diesem Format können eindimensionale Element als `VTK_LINIE` oder als `VTK_POLY_LINE` dargestellt werden.

45 Man implementiere eine Routine, die das vorkonditionierte CG-Verfahren realisiert. Man führe geeignete Tests durch. Dabei wähle man als Vorkonditionierer zum Beispiel die Identität oder andere geeignete Matrizen.