

34 Gegeben sei das Modellproblem

$$-u''(x) = \pi^2 \sin(\pi x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Man bestimme die exakte Lösung für dieses Modellproblem und zeige $u \in H^1(0, 1)$. Man schreibe eine Routine, welches dieses Modellproblem näherungsweise für eine gleichmäßige Zerlegung mit 2^n , $n = 1, \dots, 10, \dots$ Elementen löst. Für diese Näherungslösungen bestimme man den $L^2(0, 1)$ -Fehler, indem man die Routine von Aufgabe 33 verwendet. Man stelle den Fehler bezüglich der Maschenweite h grafisch dar und vergleiche diese Resultate mit den theoretischen Aussagen aus der Vorlesung.

35 Für die Klasse `SMatrix` implementiere man die Matrix-Vektor-Multiplikation. Dazu soll der Operator `*` überladen werden, d.h. man implementiere eine Methode der Bauart

```
Vector operator*(const Vector &x) const;
```

welche den Vektor der Matrix-Vektor-Multiplikation zurückgibt. Man teste diese Routine an einem geeigneten Beispiel.

36 Man implementiere eine Routine, die das Richardson Verfahren für die Klasse `SMatrix` realisiert. Es soll möglich sein, die relative Genauigkeit für das Abbruchkriterium einzustellen bzw. soll es weiters möglich sein, eine maximale Anzahl von Iterationen vorzugeben.

Man teste diese Routine an einem geeignetem Beispiel.

37 Gegeben sei das Modellproblem

$$-u''(x) = -2 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Man löse dieses Gleichungssystem näherungsweise für eine gleichmäßige Zerlegung mit 2^n , $n = 1, \dots, 10, \dots$ Elementen. Dabei löse man das Gleichungssystem mit dem Richardson Verfahren, wobei man die Schrittweite τ so wählt, sodass das Richardson Verfahren gegen die exakte Lösung konvergiert. Weiters wähle man eine geeignete relative Fehlergenauigkeit $\varepsilon > 0$ und stelle die Anzahl der Iterationen bezüglich der Dimension n_h grafisch dar.

38 Man implementiere eine Routine, die das CG-Verfahren für die Klasse `SMatrix` realisiert. Es soll möglich sein, die relative Genauigkeit für das Abbruchkriterium einzustellen bzw. soll es weiters möglich sein, eine maximale Anzahl von Iterationen vorzugeben.

Man teste diese Routine an einem geeignetem Beispiel.

39 Man betrachte das gleiche Modellproblem wie in Aufgabe 37 mit der selben Finite Elemente Diskretisierung. Jedoch verwende man hier das CG-Verfahren um die auftretenden Gleichungssysteme zu lösen. Für die selbe relative Fehlergenauigkeit $\varepsilon > 0$ wie in Aufgabe 37 vergleiche man die Iterationszahlen des CG-Verfahrens mit den Iterationszahlen des Richardson Verfahrens.