

- 20 Sei $V_{0,h}$ der Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen die im Punkt $x_0 = 0$ verschwinden. Für $u_h, v_h \in V_{0,h}$ zeige man die Beziehung

$$a(u_h, v_h) = (K_h \underline{u}_h, \underline{v}_h)_{\ell^2},$$

wobei $K_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$ die Steifigkeitsmatrix ist und $\underline{u}_h, \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$ die Koeffizienten zu den zugehörigen Funktionen $u_h, v_h \in V_{0,h}$ sind. Analog dazu zeige man den Zusammenhang für den Lastenvektor

$$\langle \hat{F}, v_h \rangle := \langle F, v_h \rangle - a(g_h, v_h) = (\underline{f}_h, \underline{v}_h)_{\ell^2}.$$

- 21 Man konstruiere quadratische Basisfunktionen $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \mathbb{P}_2(\hat{T})$ für das Referenzelement $\hat{T} = (0, 1)$, sodass für die Punkte $\xi_0 = 0, \xi_1 = \frac{1}{2}$ und $\xi_2 = 1$

$$\hat{\varphi}_i(\xi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

für alle $i, j = 0, 1, 2$ gilt. Für diese Basisfunktionen berechne man die Element-Steifigkeitsmatrix am Referenzelement \hat{T}

$$\hat{K}_h := \int_{\hat{T}} \underline{\phi}'(\xi) \underline{\phi}'(\xi)^\top d\xi,$$

wobei $\underline{\phi} := (\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)^\top$ der Vektor der quadratischen Formfunktionen ist.

- 22 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{f}$ mit einer invertierbaren, tridiagonalen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & & 0 \\ a_1 & d_2 & c_2 & & \\ & a_2 & d_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Für dieses Gleichungssystem leite man einen effizienten Gauß-Algorithmus her. Dazu zeige man, dass das gegebene Gleichungssystem äquivalent ist zu $\tilde{A}\underline{x} = \tilde{\underline{f}}$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{c}_1 & & & 0 \\ & 1 & \tilde{c}_2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \tilde{c}_{n-1} \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\underline{f}} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_n \end{pmatrix}.$$

Danach löse man das äquivalente Gleichungssystem $\tilde{A}\underline{x} = \tilde{\underline{f}}$.

Programmierteil.

Für den Programmcode ist es hilfreich sich die folgenden Datentypen zu definieren:

```
typedef double Vec2[2];  
typedef double Mat22[2][2];
```

Dadurch wird durch `Vec2` ein Vektor im \mathbb{R}^2 und durch `Mat22` eine 2×2 Matrix definiert. Weiters ist es hilfreich sich Funktionen mit

```
typedef double (*RealFunction)(double x);
```

vorzugeben. Zum speichern von größeren Vektoren empfiehlt es sich die Vektor Klasse, die auf der Übungs-Webseite zur Verfügung gestellt wurde, zu verwenden.

23 Man erstelle einen Datentyp bzw. eine Klasse, die die Informationen über eine eindimensionale Zerlegung speichert. Es sollen allen notwendigen Informationen gespeichert werden, die zur Assemblierung der Steifigkeitsmatrix notwendig sind. Insbesondere sollten folgende Routinen vorhanden sein:

- Initialisierung: Zum Beispiel eine gleichmäßige Zerlegung mit einer vorgegebenen Anzahl von Knoten.
- Die Abfrage über die Anzahl der Knoten bzw. Anzahl der Elemente.
- Die Abfrage über die Koordinaten eines Knotens der Zerlegung.
- Die Abfrage über die Knotennummern von einem beliebigen Element der Zerlegung.

Weiters implementiere man eine Methode `void TestMesh()` die eine Zerlegung des Intervalls $(0, 1)$ speichert und weiters führe man verschiedene Testfälle für die implementierten Funktionen aus.

24 Man erstelle einen Datentyp bzw. eine Klasse `SMatrix`, die effizient Matrizen in Tridiagonalform speichern kann. Insbesondere sollten folgende Operationen möglich sein:

- Initialisierung: Mit einer festen Anzahl an Zeilen bzw. Spalten und Nulleinträgen.
- Der Zugriff auf beliebige Matrixeinträge.
- Das dazuzugaddieren eines Wertes auf einen beliebigen Eintrag in der Diagonale bzw. den Nebendiagonalen.

Man implementiere eine Methode `void TestSMatrix()` die eine Tridiagonalmatrix erstellt und einige der implementierten Funktionen aufruft.