

In der Vorlesung wurde für die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_0^1 [a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)] dx \quad (3.1)$$

die Elliptizität auf dem Raum $V_0 = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$ für den Spezialfall $a = 1$ und $b = c = 0$ gezeigt. In den folgenden drei Übungsaufgaben wollen wir den allgemeinen Fall betrachten. Dabei wird in allen Aufgaben die Abschätzung

$$a(u, u) \geq a_0 \|u\|_{H^1(0,1)}^2 + \int_0^1 b(x)u'(x)u(x)dx + c_0 \|u\|_{L^2(0,1)}^2 \quad (3.2)$$

mit

$$a_0 := \inf_{x \in (0,1)} a(x) \quad \text{und} \quad c_0 := \inf_{x \in (0,1)} c(x)$$

benötigt.

- 11** Man zeige die Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ auf dem Raum $V_0 = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$ unter den Bedingungen, dass

$$a_0 > 0, \quad c_F \|b\|_{L^\infty(0,1)} < a_0, \quad c_0 \geq 0.$$

Dabei ist c_F die Konstante aus der Friedrichs-Ungleichung.

- 12** Man zeige die Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ auf dem ganzen Raum $H^1(0, 1)$ unter den Bedingungen, dass

$$a_0 > 0, \quad \|b\|_{L^\infty(0,1)} < 2\sqrt{a_0 c_0}, \quad c_0 > 0.$$

Hinweis: Man zeige, dass

$$a(u, u) \geq q(\|u\|_{H^1(0,1)}, \|u\|_{L^2(0,1)})$$

mit $q(\xi, \eta) := a_0 \xi^2 - \|b\|_{L^\infty(0,1)} \xi \eta + c_0 \eta^2$. Weiters zeige man, dass

$$q(\xi, \eta) \geq a_0 c \xi^2 \quad \text{und} \quad q(\xi, \eta) \geq c_0 c \eta^2$$

mit $c = 1 - \frac{\|b\|_{L^\infty(0,1)}^2}{4a_0 c_0}$.

- 13** Man zeige die Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ auf dem Raum $V_0 = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$ unter den Bedingungen, dass

$$a_0 > 0, \quad b(x) = b_0 \geq 0, \quad c_0 \geq 0,$$

wobei $b_0 \in \mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Man zeige

$$\int_0^1 u'(x)u(x)dx = \frac{1}{2}u(x)^2 \Big|_0^1 \geq 0 \quad \forall u \in V_0.$$

- 14 Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, beschränkte und nicht negative Bilinearform auf V , also $a(u, v) = a(v, u)$ und $a(u, u) \geq 0$ für alle $u, v \in V$. Weiters sei $V_0 \subset V$ und $V_g = g + V_0$ mit $g \in V$. Man zeige, dass das Variationsproblem:

$$\text{Gesucht ist } u \in V_g : \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0$$

äquivalent zur Minimierungsaufgabe:

$$\text{Gesucht ist } u \in V_g : \quad \mathcal{J}_a(u) = \min_{v \in V_g} \mathcal{J}_a(v), \quad \text{mit } \mathcal{J}_a(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle$$

ist.