

01 Man zeige, dass jede gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x),$$

mit $a \in \mathcal{C}^1(0, 1)$ und $b, c \in \mathcal{C}(0, 1)$ geschrieben werden kann als

$$\bar{a}(x)u''(x) + \bar{b}(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x),$$

mit geeigneten Funktionen $\bar{a} \in \mathcal{C}^1(0, 1)$ und $\bar{b} \in \mathcal{C}(0, 1)$. Man zeige auch die andere Richtung.

02 Man leite variationelle Formulierungen für folgende Randwertprobleme her:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} -u''(x) + u'(x) = f(x) & \text{für } x \in (0, 1) \\ u(0) = g_0 \\ u(1) = g_1 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} -u''(x) + u'(x) = f(x) & \text{für } x \in (0, 1) \\ u(0) = g_0 \\ u'(1) = g_1 - \alpha_1 u(1) \end{cases} \end{aligned}$$

03 Man betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -(a(x)u'(x))' &= 1 & \text{für } x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \\ a(1)u'(1) &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei $a(x) = \sqrt{2x - x^2}$. Man zeige, dass $u(x) = \sqrt{2x - x^2}$ eine *klassische* Lösung von (1.1) ist, d.h., $u \in X := \mathcal{C}^2(0, 1) \cap \mathcal{C}^1(0, 1] \cap \mathcal{C}[0, 1]$. Weiters zeige man, dass

$$\int_0^1 |u'(x)|^2 dx = \infty.$$

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass $u \notin H^1(0, 1)$, d.h., u ist keine *schwache* Lösung.

04 Die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen sei gegeben durch

$$u_k(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}], \\ 1 - \frac{1}{2k} - 2k(x - \frac{1}{2})^2 & \text{für } x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}), \\ 2(1-x) & \text{für } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}, 1]. \end{cases}$$

Man zeige, dass $u_k \in \mathcal{C}^1[0, 1]$. Weiters sei u definiert als

$$u(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-x) & \text{für } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Man untersuche ob gilt, dass $u, u_k \in H^1(0, 1)$ oder nicht. Weiters berechne man $\|u_k - u\|_{H^1(0,1)}$ oder verwende geeignete Abschätzungen um zu zeigen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{H^1(0,1)} = 0.$$

Man verwende diese Resultate um zu zeigen, dass $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist in $\mathcal{C}^1[0, 1]$ bezüglich der H^1 -Norm, aber es gibt keinen Grenzwert in $\mathcal{C}^1[0, 1]$.

05 Man zeige, dass es **keine** Funktion $w \in L^2(0, 1)$ gibt mit

$$\varphi(\frac{1}{2}) = \int_0^1 w(x)\varphi(x)dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0, 1).$$

Bemerkung: Man betrachte die Folge von Testfunktionen

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} e^{1 - \frac{1}{1-n^2(1-2x)^2}} & \text{für } |1-2x| < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in \mathcal{C}_0^\infty(0, 1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$