P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

$\boxed{\textbf{PS X}}$ 20.01. 2017 (Zeit : $10^{\underline{15}} - 11^{\underline{45}}$ Raum : S2 346): $\boxed{25}$ $\boxed{\text{TP4}}$

3 Strömungsmechanik

3.1 Transport-Theorem

$\boxed{25}$ Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 1$, d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int\limits_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial (F \cdot v)}{\partial x}(x,t)\right] dx \quad !$$

$\boxed{\text{TP4a}}$ Die Vektorfunktion $\varphi : \Omega(t_0) \times (T_1, T_2) \longrightarrow R^d$ bildet die Lagrange-Koordinaten (X,t) auf die Euler-Koordinaten (x,t) ab, d.h. $x = \varphi(X,t)$. Man zeige für $d = 2$ und $d = 3$ die Beziehung

$$\frac{\partial D}{\partial t}(X,t) = D(X,t)\, \mathrm{div}\,(v(x,t)),$$

wobei D die Determinande der Jacobi-Matrix der Abbildung φ ist, d.h.

$$D(X,t) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}(X,t)\right).$$

$\boxed{\text{TP4b}}$ Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 2$ bzw. $d = 3$, d.h. die Formeln

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int\limits_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \mathrm{div}\,(F \cdot v)(x,t)\right] dx$$

und (Gauß-Theorem)

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int\limits_{\omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\, dx + \int\limits_{\partial\omega(t)} F(x,t)(v(x,t), n(x,t))\, ds_x \quad !$$