P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

"Mathematische Modelle in der Technik"

PS VII 15.12. 2016 (Zeit : $13^{\underline{45}}$ – $15^{\underline{15}}$ Raum : S2 346): 17 - 22

2 Festkörpermechanik

2.1 Der Zugstab

17 Sei $u \in C^2(Q_T), f \in C(Q_T), E \in C^1(0,\ell)$ und $\varrho \in C(0,\ell)$ mit $Q_T = (0,\ell) \times (0,T)$. Man zeige, dass dann $x^*, x^{**}, x^{***} \in (x_1, x_2)$ und $t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2)$ existieren, sodass die integrale Form (2.8) aus der Vorlesung zur Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x^*, t^*)\varrho(x^*)\Delta t \Delta x = \frac{\partial}{\partial x}(E(x^{**})\frac{\partial u}{\partial x}(x^{**}, t^{**}))\Delta t \Delta x + f(x^{***}, t^{***})\Delta t \Delta x \quad (2.19)$$

äquivalent ist.

18 Ein homogener Zugstab ($\rho, E = const. > 0$) werde zeitharmonisch erregt, d.h. $f(x,t) = f(x)\exp(i\omega t)$ und $g_l(t) = g_l \exp(i\omega t)$, wobei ω die Erregerfrequenz bezeichnet. Man suche die periodischen Lösungen und bestimme die kritischen Frequenzen (siehe auch Folie 10, Ü 2.2) !

2.2 Lineare Elastizitätstheorie

2.2.1 Spannungszustand

19 Schneiden Sie virtuell einen Würfel

$$"\Delta x" := [x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}] \times [x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}] \times [x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}]$$

aus einem im Gleichgewicht befindlichen Körper heraus und schreiben Sie das Kräftegleichgewicht (z.B. in x_1–Richtung) auf (siehe auch Folie 11, Ü 2.4) !

20* Zeigen Sie die Transformationsformel

$$t_i^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji}(x) n_j, \quad i = 1,2,3, \quad \forall n = (n_1, n_2, n_3)^T \in R^3 : |n| = 1,$$

indem Sie das Kräftgleichgewicht an einem Tetraeder betrachten (Folie 11, Ü 2.3) !

Hinweis: Sei Ω ein sich im Gleichgewicht befindender 3D Körper. Sei x in Ω beliebig gewählt. Wir betrachten nun die Kräftebilanz auf einem Teilgebiet $A \subset \Omega$, das die Form eines Tetraeders hat und wie folgt definiert ist: x ist ein Eckpunkt von A,

d. h. von x gehen drei Kanten weg, und zwar parallel zu den Koordinatenachsen x_j für $j \in \{1,2,3\}$, jeweils in positive Richtung. Jene Kante, die parallel zu x_j verläuft hat die Länge $dx_j > 0$. Dies definiert den Tetraeder komplett. Wir bezeichnen jene Fläche des Tetraeders, die normal zu x_j ist, mit F_j. Die Außennormale zu F_j ist der negative Einheitsvektor e_j. Die vierte Fläche des Tetraeders A bezeichnen wir mit F. Sie liegt je nach Wahl der Längen dx_j schief im Raum mit Normale $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ der Länge 1. Aufgrund der speziellen Konstruktion des Tetraeders A gilt $n_j > 0$ fuer alle $j \in \{1,2,3\}$, und es gilt

$$|F_j| = |F|\, n_j\,. \tag{2.20}$$

Es bezeichne $t^{(r)}(x)$ den Cauchy'schen Spannungsvektor im Punkt x bezüglich der Richtung r. Stellen sie nun mit diesen Bezeichnungen die Kräftebilanz auf.

$\boxed{21^\star}$ Für die folgenden, jeweils 4 Schnittebenen

$$\tilde{n}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \tilde{n}^{(2)} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \tilde{n}^{(3)} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\tau_1 = \tau_{\tilde{n}^{(1)}} = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2},\ \tau_2 = \tau_{\tilde{n}^{(2)}} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2},\ \tau_3 = \tau_{\tilde{n}^{(3)}} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2},$$

$$\sigma_{\tilde{n}^{(1)}} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2},\ \sigma_{\tilde{n}^{(2)}} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2},\ \sigma_{\tilde{n}^{(3)}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Man zeige, dass die sogenannten Hauptschubspannungen τ_1, τ_2, τ_3 Extermalwerte der Schubspannungen sind !

$\boxed{22}$ Man zeige, dass aus dem dynamischen Momentengleichgewicht $(14)_{\text{dyn}}$ und aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht $(15)_{\text{dyn}}$ in differentieller Form die Symmetrie des Spannungstensors folgt, d.h. $(16)_{\text{dyn}}$ (die Nummern beziehen sich auf die entsprechenden Formelnummern in der Vorlesung) !