

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS IV

10.11. 2016 (Zeit : 13⁴⁵ – 15¹⁵ Raum : S2 346) : **9** - **13**

1.5 Instationäre Wärmeleitprobleme

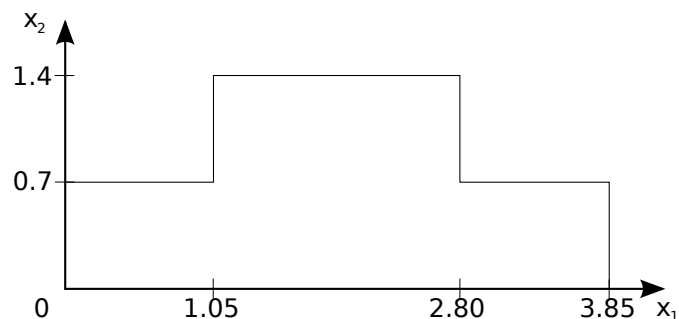
1.5.1 Abkühlung eines Kupferstabes

- Für einen mantelisierten Kupferstab ($\rho = 8960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $c = 384 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, $\lambda = 394 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$) der Länge $L = 1$ m mit Durchmesser $d = 1$ cm, der wärmequellenfrei ($f = 0$) ist, an beiden Rändern mit der gleichen Temperatur $u_a(t) = u_b(t) = g(t) := 60^\circ\text{C}$ gekühlt wird und für $t_A = 0$ die Anfangstemperaturverteilung $u_0(x) = 60^\circ + 40^\circ \sin(\pi x/L)$ besitzt, soll der Temperaturverlauf im Stabmittelpunkt und die Temperatur nach einer Stunde $t_E = 1$ h ermittelt werden. Beachten Sie die Maßeinheiten.

- 9** Modellieren Sie das oben beschriebene instationäre Wärmeleitproblem in integraler Form (Bilanzform).
- 10** Leiten Sie die differentielle Form (klassische Formulierung) her. Sind die dafür notwendigen Voraussetzungen erfüllt?
- 11** Lösen Sie die ARWA aus **10** analytisch und bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt $t = t_* > 0$ die Temperatur u im gesamten Stab erstmals kleiner oder höchstens gleich 70°C ist.

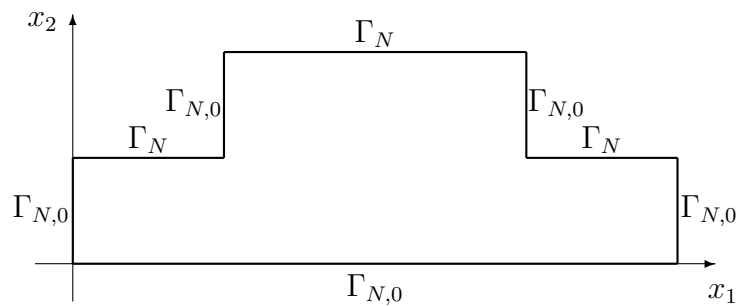
1.5.2 Instationäre Temperaturverteilung in einem Betonträger

- Gegeben ist ein Betonträger mit dem skizzierten Querschnitt, der an der Unterseite und an den vertikalen Seitenflächen wärmeisoliert ist. Auf den Oberseiten ist eine wellenförmige Abdeckung angebracht. Der Träger wird von der Sonne beschienen. Gesucht ist die Temperaturverteilung im Laufe eines Tages, wenn man zu Sonnenaufgang eine homogene Temperatur von 5°C voraussetzt. Wir sind am Temperaturfeld in der Mitte des Trägers interessiert !



- Maße des Trägers: Länge: 20.00 m, Höhe: 1.40 m, Breite: 3.85 m;
- Materialkonstanten: $\rho = 2450 \frac{kg}{m^3}$, $c = 900 \frac{J}{kg \cdot K}$, $\lambda = 2.457 \frac{W}{K \cdot m}$;
- Sonneneinstrahlung:
 - * Zeit zwischen Sonnenaufgang und -untergang: 12 h,
 - * Intensität der Sonneneinstrahlung: $\sin(2\pi t/24)$,
 - * Räumliche Variation der Sonneneinstrahlung infolge der wellenförmigen Abdeckung:
 $0.5(1 + \cos(\frac{40\pi x}{7}))$;
 - * Maximale Sonneneinstrahlung am Mittag: $1000 \frac{W}{m^2}$.

12* Modellieren Sie den tatsächlichen Wärmeeintrag $[W/m^2]$ durch die Sonneneinstrahlung durch eine Neumann-Randbedingung auf den horizontalen Oberflächenteilen Γ_N (Oberseite) des Betonträgers ! Nehmen Sie dazu an, dass die Sonnenstrahlen nur vertikal einfallen. Auf $\Gamma_{N,0}$ nehmen wir, der der Wärmefluss gleich Null gesetzt werden kann.



13 Modellieren Sie das oben beschriebene instationäre Wärmeleitproblem durch eine ARWA in klassischer Formulierung in einem möglichst kleinen Rechengebiet Ω (Hinweis: Dimensionsreduktion und Ausnutzung von Symmetrien) !