P R O S E M I N A R

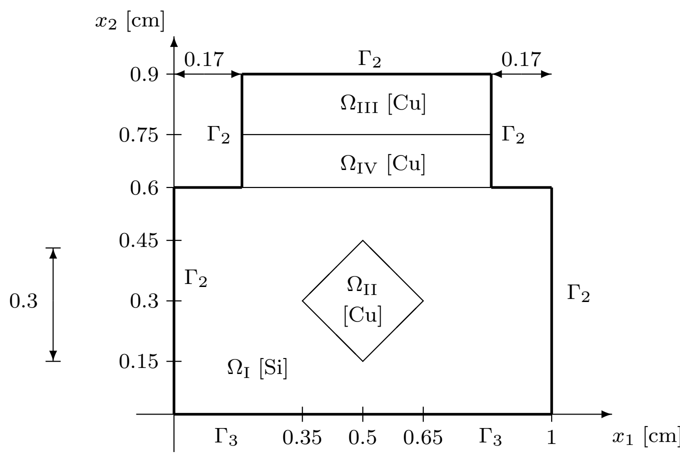
zur Vorlesung

"Mathematische Modelle in der Technik"

PS II 28.10. 2014 (Zeit : $08^{\underline{30}} - 10^{\underline{00}}$ Raum : S2 346): $\boxed{5}$ - $\boxed{8}$

1.3 Wärmeleitung in einer dünnen Platte

◯ **Physikalisches Problem :** Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{III}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{IV}}$, in einer dünnen Platte „CHIP" der Art



mit einer Plattendicke von $d = 0.01$ cm und mit den Daten

- Wärmeleitkoeffizienten

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isotrop}}}{=} \lambda(x) := \begin{cases} \lambda_{\mathrm{Si}} = 0.01 \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}\, K}\right], & x \in \bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \\ \lambda_{\mathrm{Cu}} = 3.95 \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}\, K}\right], & x \in \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{III}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{IV}} \end{cases}$$

- $a \equiv 0$ (kein Wärmeaustausch in z-Richtung),
- Wärmequellen:

$$f(x) := \begin{cases} 0, \ x \in \Omega_{\mathrm{I}} \cup \Omega_{\mathrm{III}}, \\ 2^k \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}^3}\right], \ x \in \Omega_{\mathrm{II}}, \\ -0.4545454 \cdot 2^k \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}^3}\right], \ x \in \Omega_{\mathrm{IV}}, \end{cases}$$

wobei $k =$ letzte Ziffer der Matrikelnummer $\in \{0, 1, \ldots, 9\}$,

– Randbedingungen (RB) auf $\Gamma \equiv \partial\Omega = \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$:

1. $\Gamma_1 = \emptyset$ (keine RB 1. Art),
2. $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma \setminus \Gamma_3$: $\dfrac{\partial u}{\partial N} = g_2 := 0$ auf Γ_2,
3. $\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1,\ x_2 = 0\}$: $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \alpha(g_3 - u)$ auf Γ_3

   mit $g_3 = 300\,K,\ \ \alpha = 0.2\,[W/(\mathrm{cm}^2\,K)]$.

$\boxed{5}$ Man leite die stationäre Wärmeleitgleichung zur Bestimmung der Temperaturverteilung $u(x)$ in der **integralen Form** (= Bilanzform) her.

$\boxed{6}$ Geben Sie die **klassische Formulierung**, d.h. die PDgl. in Ω_{I}, Ω_{II}, Ω_{III} und Ω_{IV}, Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{II}}$ und $\bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{IV}}$ sowie die Randbedingungen an.

$\boxed{7}$ Leiten Sie die **Variationsformulierung** in der Form

$$\begin{aligned} &\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u,v) = \ < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \\ &\text{d.h.,} \quad \mathbf{V}_g = ? \\ &\qquad\quad\ \mathbf{V}_0 = ? \\ &\qquad\quad\ a(u,v) = ? \\ &\qquad\quad\ < F, v > = ? \end{aligned} \tag{1.17}$$

her.

$\boxed{8}$ Man zeige, dass eine hinreichend glatte (genau Angabe der geforderten Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften) Lösung $u \in \mathbf{V}_g$ des Variationsproblems (1.17) das klassische Randwertproblem (d.h. PDgl. in Ω_{I}, Ω_{II}, Ω_{III} und Ω_{IV}; Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{II}}$ und $\bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{IV}}$; Randbedingungen) löst !