Prüfungsfragen und Prüfungsaufgaben

Fragen 1 - 17:

1. Modellieren Sie ein örtlich eindimensionales, stationäres Wärmeleitproblem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Randbedingungen, Interfacebedingungen) !

2. Modellieren Sie ein örtlich dreidimensionales, stationäres Wärmeleitproblem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Randbedingungen, Interfacebedingungen) !

3. Modellieren Sie ein örtlich eindimensionales, instationäres Wärmeleitproblem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Anfangs- und Randbedingungen, Interfacebedingungen) !

4. Modellieren Sie ein örtlich dreidimensionales, instationäres Wärmeleitproblem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Anfangs- und Randbedingungen, Interfacebedingungen) !

5. Modellieren Sie ein örtlich dreidimensionales, instationäres Wärmeleit-Wärmetransport-Problem (Integralbilanzformulierung, differentielle Form, Anfangs- und Randbedingungen, Interfacebedingungen) !

6. Modellieren Sie den Zugstab im statischen und im dynamischen Fall !

7. Beschreiben Sie den Spannungszustand in einem belasteten Körper im Gleichgewicht (totale Spannung, Spannungstensor, Kugeltensor, Deviator, Transformationsformel, Normal- und Tangentialspannung, Hauptspannungen, Invarianten des Spannungstensors) !

8. Leiten Sie die beschreibenden Gleichungen des statischen und dynamischen Kräfte- und Momentengleichgewichts her !

9. Beschreiben Sie den Verzerrungszustand (Greenscher Verzerrungstensor, Cauchyscher Verzerrungstensor) ! Welche geometrische Interpretation kann man den Komponenten des Verzerrungstensors geben ?

10. Leiten Sie die LAMÉschen Gleichungen aus dem Kräfte- und Momentengleichgewicht (Kinetik), den geometrischen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik) und dem HOOKEschen Gesetz ($\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$) für isotrope, homogene Materialien im statischen Fall her ! Welche Randbedingungen sind möglich und was bedeuten sie mechanisch ?

11. Leiten Sie die NAVIER-LAMÉschen Gleichungen aus dem dynamischen Kräfte- und Momentengleichgewicht (Kinetik), den geometrischen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik) und dem HOOKEschen Gesetz ($\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$) für isotrope, homogene Materialien im dynamischen Fall her ! Welche Rand- und Anfangsbedingungen sind möglich und was bedeuten sie mechanisch ?

12. Was verstehen Sie unter einem ebenen Verzerrungszustand und unter einem ebenen Spannungszustand ? Leiten Sie die beschreibenden Gleichungen für isotrope, homogene Materialien im statischen Fall her !

13. Was verstehen Sie unter der Lagrangeschen und Eulerschen Beschreibungsweise ?

14. Geben Sie das Transport-Theorem an und beweisen Sie es im örtlich eindimensionalen ($d = 1$) Fall ! Welche Anwendungen des Transport-Theorems haben Sie in der Vorlesung kennengelernt ?

15. Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung und Bewegungsgleichungen aus dem Massenerhaltungssatz und dem Impulserhaltungssatz her !

16. Leiten Sie die Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung von inkompressiblen Newtonschen Fluiden her ! Welche Rand- und Anfangsbedingungen können Sie vorschreiben ?

17. Was versteht man unter der Dimensionsanalyse und wie hängt diese mit der Ähnlichkeitstheorie zusammen ? Erläutern Sie die Ähnlichkeitstheorie an einem Beispiel !

Aufgaben 1 - 10:

1. Man zeige, dass
   a)

$$\lim_{\triangle x_1,\triangle x_2,\triangle x_3\to 0} \frac{1}{\triangle x_1\triangle x_2\triangle x_3} \int\limits_{x_1-\frac{\triangle x_1}{2}}^{x_1+\frac{\triangle x_1}{2}} \int\limits_{x_2-\frac{\triangle x_2}{2}}^{x_2+\frac{\triangle x_2}{2}} \int\limits_{x_3-\frac{\triangle x_3}{2}}^{x_3+\frac{\triangle x_3}{2}} f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, d\xi_3\, d\xi_2\, d\xi_1 \quad = \quad f(x_1,x_2,x_3)$$

   gilt, falls $f \in C(\Omega)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$,

   b)

$$\lim_{\triangle x_1,\triangle x_2,\triangle x_3\to 0} \frac{1}{\triangle x_1\triangle x_2\triangle x_3} \int\limits_{x_1-\frac{\triangle x_1}{2}}^{x_1+\frac{\triangle x_1}{2}} \int\limits_{x_3-\frac{\triangle x_3}{2}}^{x_3+\frac{\triangle x_3}{2}} \Big[\sigma(\xi_1, x_2+\frac{\triangle x_2}{2},\xi_3) - \sigma(\xi_1, x_2-\frac{\triangle x_2}{2},\xi_3)\Big]\, d\xi_3\, d\xi_1 \quad = \quad \frac{\partial\sigma(x)}{\partial x_2}$$

   gilt, falls $\sigma \in C^1(\Omega)$.

2. Berechnen Sie analytisch das Temperaturfeld $u(\cdot)$ gemäss der Wärmeleitgleichung $(1.5)_{V0}$ aus der Vorlesung für die Daten:
   $a = 0, b = 1, \eta \in (0,1)$ fix, $q = 0, f = 0, g_a = 1, g_b = 0$ und

$$\lambda(x) := \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & \text{const} > 0 \text{ für } x < \eta \\ \lambda_2 & = & \text{const} > 0 \text{ für } x > \eta \end{array} \right\}$$

   mit $0 < \lambda_1 < \lambda_2$!
   Führen Sie Parameterstudien mit dem Wärmeleitkoeffizienten durch:

   a) $\lambda_1 \longrightarrow 0$
   b) $\lambda_2 \longrightarrow \infty$
   c) $\lambda_1 = \lambda_2$
   d) $\eta = 0,\ \eta = 1$

3. Bestimmen Sie die von einem (fixierten) Parameter $y \in (0,1)$ abhängige Lösung $u_y(\cdot)$ der Randwertaufgabe (Wärmeleitproblem mit Punktquelle)

$$\begin{array}{rcl} -u''(x) & = & \delta(x-y),\ x \in (0,1) \qquad (f_y = 1), \\ u(0) & = & u(1) \ = \ 0, \end{array}$$

   und zeigen Sie, dass

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy,\ x \in [0,1]$$

   mit $G(x,y) := u_y(x)$ die Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcl} -u''(x) & = & f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) & = & u(1) \ = \ 0. \end{array}$$

4. Die Bestimmung der Temperaturverteilung $u(y)$ in einem homogenen $(c, \rho, \lambda = const.)$, mantelisolierten, wärmequellenfreien, dünnen Draht der Länge l, der mit der Geschwindigkeit v bewegt wird, am linken Rand auf 1^o C und rechten Rand auf 0^o C gehalten wird, führt nach Skalierung $x = y/l$ auf das Randwertproblem (siehe Vorlesung)

$$-u''(x) + pu'(x) = 0, \ \forall x \in (0,1), \ u(0) = 1, \ u(1) = 0. \tag{1}$$

Bestimmen Sie $p = p(c, \rho, \lambda, v, l) = ?$, lösen Sie dann das Randwertproblem (1) analytisch und diskutieren Sie das Verhalten der Lösung für $v \longrightarrow \infty$!

5. Sei $u \in C^2(Q_T), f \in C(Q_T), E \in C^1(0, \ell)$ und $\varrho \in C(0, \ell)$ mit $Q_T = (0, \ell) \times (0, T)$. Man zeige, dass dann $x^*, x^{**}, x^{***} \in (x_1, x_2)$ und $t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2)$ existieren, sodass die integrale Form (2.8) aus der Vorlesung zur Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x^*, t^*)\varrho(x^*)\Delta t \Delta x = \frac{\partial}{\partial x}(E(x^{**})\frac{\partial u}{\partial x}(x^{**}, t^{**}))\Delta t \Delta x + f(x^{***}, t^{***})\Delta t \Delta x \tag{2}$$

äquivalent ist.

6. Ein homogener Zugstab $(\rho, E = const. > 0, u(0,t) = 0, E\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = g_l(t))$ werde zeitharmonisch erregt, d.h. $f(t) = f \exp(i\omega t)$ und $g_l(t) = g_l \exp(i\omega t)$ mit gegebenen Amplituden f und g_l aus R und gegebener Erregerfrequenz ω. Man suche die periodischen Lösungen und bestimme die kritischen Frequenzen (siehe auch Folie 10, Ü 2.2) !

7. Schneiden Sie virtuell einen Würfel

$$\text{“}\Delta x\text{''} := [x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}] \times [x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}] \times [x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}]$$

aus einem im Gleichgewicht befindlichen Körper heraus und schreiben Sie das Kräftegleichgewicht (z.B. in x_1–Richtung) auf (siehe auch Folie 11, Ü 2.4) !

8. Man zeige, dass aus dem dynamischen Momentengleichgewicht

$$\int_{\Omega'} x \times f(x,t)\,dx + \int_{\partial\Omega'} x \times t^{(n)}(x,t)\,ds_x = \int_{\Omega'} x \times a(x,t)\,\rho\,dx \quad \forall\,\Omega' \ \forall\,t$$

und aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht

$$\rho a - \operatorname{div}\sigma = f \quad \text{in } Q_T = \Omega \times (0,T)$$

in differentieller Form die Symmetrie des Spannungstensors, d.h.

$$\sigma_{ij}(x,t) = \sigma_{ji}(x,t) \quad \forall\,i,j = 1,2,3 \quad \forall\,(x,t) \in \overline{Q}_T$$

folgt, wobei $a(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$ die Beschleunigung bezeichnet !

9. Man zeige, dass die linearisierten Verzerrungen $\varepsilon(v) = (\varepsilon_{ij}(v)), \ i,j = 1,2,3,$ einer Verschiebungsfunktion $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in [C^2(\Omega)]^3$ genau dann verschwinden (also $\varepsilon(v) = 0$), wenn $v \in \mathcal{R}$ eine (linearisierte) Starrkörperverschiebung ist, wobei der Unterraum $\mathcal{R} := \{v(x) = a \times x + b : a, b \in R^3\}$ durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Hinweis: Zeigen, und verwenden Sie $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \, \partial x_k}(x) = \frac{\partial \varepsilon(v)_{ij}}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial \varepsilon(v)_{ki}}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial \varepsilon(v)_{jk}}{\partial x_i}(x)$.

10. Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 1$, d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int\limits_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial (F \cdot v)}{\partial x}(x,t) \right] dx \quad !$$