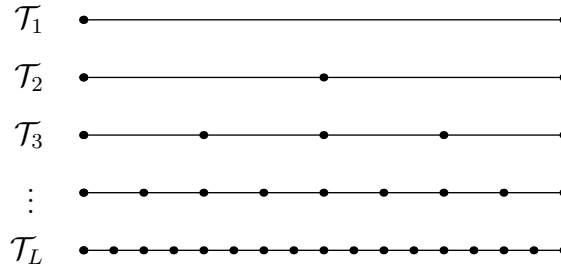


In den nächsten drei Aufgabe wird der MDS-Vorkonditionierer für das Modellproblem 1D betrachtet. Dazu seien geschachtelte Zerlegungen $\{\mathcal{T}_\ell\}_{\ell=1}^L$ des Intervalls $(0, 1)$ gegeben, siehe dazu auch die Abbildung:



Für jede dieser Zerlegungen \mathcal{T}_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$ betrachten wir die Ansatzräume

$$V_\ell = \{v_\ell \in \mathcal{C}[0, 1] : v_{\ell|\tau} \in \mathbb{P}_1(\tau) \text{ für alle } \tau \in \mathcal{T}_\ell \text{ und } v_\ell(0) = 0\}$$

mit den jeweiligen nodalen Basisfunktionen $\{\varphi_{\ell,i}\}_{i=1}^{n_\ell}$, $n_\ell = 2^{\ell-1}$.

- 46 Man betrachte zwei aufeinanderfolgende Zerlegungen \mathcal{T}_ℓ und $\mathcal{T}_{\ell+1}$ mit den zugehörigen Ansatzräumen $V_\ell \subset V_{\ell+1}$. Man bestimme die lineare Abbildung $I_\ell^{\ell+1} \in \mathbb{R}^{n_{\ell+1} \times n_\ell}$ mit der man grobe Basisfunktionen $\varphi_{\ell,i}$, $i = 1, \dots, n_\ell$ durch feine Basisfunktionen $\varphi_{\ell+1,j}$, $j = 1, \dots, n_{\ell+1}$ darstellen kann, das heißt

$$\varphi_{\ell,i} = \sum_{j=1}^{n_{\ell+1}} I_\ell^{\ell+1}[j, i] \varphi_{\ell+1,j} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n_\ell.$$

Sei nun $v_\ell \in V_\ell \subset V_{\ell+1}$ mit dem Koeffizientenvektor $\underline{v}_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell}$ bezüglich der Basis $\{\varphi_{\ell,i}\}_{i=1}^{n_\ell}$. Man zeige weiters, dass der Koeffizientenvektor von $v_\ell \in V_{\ell+1}$ bezüglich der Basis $\{\varphi_{\ell+1,i}\}_{i=1}^{n_{\ell+1}}$ gegeben ist durch

$$\underline{v}_{\ell+1} = I_\ell^{\ell+1} \underline{v}_\ell \in \mathbb{R}^{n_{\ell+1}}.$$

- 47 Für $R_L \in V^*$ werden die Vektoren $\underline{r}_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell}$, $\ell = 1, \dots, L$ definiert als

$$(\underline{r}_\ell, \underline{v}_\ell)_{\ell^2} = \langle R_L, v_\ell \rangle \quad \text{für alle } v_\ell \in V_\ell$$

mit $v_\ell = \sum_{i=1}^{n_\ell} v_{\ell,i} \varphi_{\ell,i}$ und $\underline{v}_\ell = [v_{\ell,i}]_{i=1}^{n_\ell}$. Für $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell < L$ zeige man dann den Zusammenhang

$$\underline{r}_\ell = I_{\ell+1}^\ell \underline{r}_{\ell+1} \quad \text{mit } I_{\ell+1}^\ell := (I_\ell^{\ell+1})^\top.$$

- 48 Sei $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ die Bilineaform vom Modellproblem 1D. Für einen Vektor $\underline{r}_L \in \mathbb{R}^{n_L}$ ist der MDS-Vorkonditionierer $C_L^{-1} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$ gegeben durch

$$C_L^{-1} \underline{r}_L = \underline{w}_L,$$

wobei $\underline{w}_L \in \mathbb{R}^{n_L}$ der Koeffizientenvektor der Funktion

$$w_L = \sum_{\ell=1}^L \sum_{i=1}^{n_\ell} w_{\ell,i} \varphi_{\ell,i} \in V_L$$

bezüglich der Basis $\{\varphi_{L,i}\}_{i=1}^{n_L}$ ist. Dabei sind die Koeffizienten $w_{\ell,i}$ gegeben über die Unterraum-Korrektur-Gleichungen

$$a(\varphi_{\ell,i}, \varphi_{\ell,i})w_{\ell,i} = \langle R, \varphi_{\ell,i} \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, n_\ell \text{ und } \ell = 1, \dots, L.$$

Man schreibe den Vorkonditionierer C_L^{-1} in Abhängigkeit von $I_\ell^{\ell+1}$ bzw. $I_{\ell+1}^\ell$ (siehe Aufgabe 46 und Aufgabe 47) und den Diagonalmatrizen $D_\ell = \text{diag}(K_\ell)$, wobei $K_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell \times n_\ell}$ die Steifigkeitsmatrix bezüglich dem Level ℓ ist.

Programmierteil.

- 49 Man implementiere eine Routine, die die Anwendung des MDS-Vorkonditionierers von Aufgabe 48 realisiert. Dazu stelle man für eine gegebene Hierarchie die Steifigkeitsmatrizen auf und berechne die Inverse der Diagonalmatrizen. Weiters wird die Realisierung der Transferoperatoren $I_\ell^{\ell+1}$ bzw. $I_{\ell+1}^\ell$ benötigt, siehe dazu Aufgabe 46 und Aufgabe 47.
- 50 Man verwende das vorkonditionierte CG-Verfahren um die linearen Gleichungssysteme von Aufgabe 42 näherungsweise zu lösen. Dazu verwende man den Vorkonditionierer von Aufgabe 49. Weiters stelle man die Anzahl der benötigten CG-Iterationen bezüglich der Dimension n_h grafisch dar.