Numerik Partieller Differentialgleichungen WS 2015 / 16
8. Übung Montag, 14. Dezember 2015, 10.15–11.45, S2 054

$\boxed{36}$ Gegeben sei ein Lipschitz-Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^d$ mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Für das d-dimensionale Modellproblem: Gesucht ist $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + \underline{b} \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ (A(x)\nabla u(x)) \cdot \underline{n}(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

leite man eine Variationsformulierung her. Dabei sind f, g_D und g_N skalare Funktionen und $A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\underline{b} : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ genügend reguläre Koeffizienten.

$\boxed{37}$ Gegeben sei das d-dimensionale Modellproblem

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(\nabla u(x)) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ \nabla u(x) \cdot \underline{n}(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

mit $|\Gamma_D| > 0$. Für die zugehörige Variationsformulierung zeige man für $f \in L^2(\Omega)$, $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ und $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ die $H^1(\Omega)$-Beschränktheit und V_0-Elliptizität der Bilinearform $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Weiters zeige man, dass das zugehörige linear Funktional $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

$\boxed{38}$ Betrachtet werde die Funktion

$$u(x,y) = \sqrt[4]{-\log(\sqrt{x^2+y^2})}$$

auf dem zweidimensionalen Gebiet

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 0.5\}.$$

Man zeige, dass diese Funktion im Raum $H^1(\Omega)$ liegt, also $u \in H^1(\Omega)$. Ist die Funktion u stetig?

Hinweis: Man transformiere die auftretenden Integrale mit Hilfe der Polarkoordinaten und berechne die jeweiligen Normen.

$\boxed{39}$ Betrachtet werde das zweidimensionale Referenzelement

$$\hat{T} := \{\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : \xi^{(1)} > 0, \xi^{(2)} > 0 \text{ und } 1 - \xi^{(1)} - \xi^{(2)} > 0\}.$$

Für die Knoten $\xi_1 := (0,0)$, $\xi_2 := (1,0)$ und $\xi_3 := (0,1)$ bestimme man die linearen Formfunktionen $\hat{\varphi}_i : \hat{T} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ mit der Eigenschaft, dass

$$\hat{\varphi}_i(\xi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \text{für alle } i,j \in \{1,2,3\}.$$

Weiters berechne man für diese Formfunktionen die lokale Steifigkeitsmatrix

$$\hat{K} := [K_{ij}]_{i,j=1}^3, \qquad \text{mit } K_{ij} = \int_{\hat{T}} \nabla\hat{\varphi}_j \cdot \nabla\hat{\varphi}_i \mathrm{d}x \qquad \text{für } i,j \in \{1,2,3\}.$$

Programmierteil.

$\boxed{40}$ Für die Klasse `SMatrix` implementiere man die Matrix-Vektor-Multiplikation. Dazu soll der Operator `*` überladen werden, d.h. man implementiere eine Methode der Bauart

```
Vector operator*(const Vector &x) const;
```

welche den Vektor der Matrix-Vektor-Multiplikation zurückgibt. Man teste diese Routine an einem geeigneten Beispiel.

$\boxed{41}$ Man implementiere eine Routine, die das Richardson Verfahren für die Klasse `SMatrix` realisiert. Es soll möglich sein, die relative Genauigkeit für das Abbruchkriterium einzustellen bzw. soll es weiters möglich sein, eine maximale Anzahl von Iterationen vorzugeben.

Man teste diese Routine an einem geeignetem Beispiel.

$\boxed{42}$ Gegeben sei das Modellproblem

$$-u''(x) = -2 \text{ für } x \in (0,1), \qquad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Man löse dieses Gleichungssystem näherungsweise für eine gleichmäßige Zerlegung mit 2^n, $n = 1, \ldots, 10, \ldots$ Elementen. Dabei löse man das Gleichungssystem mit dem Richardson Verfahren, wobei man die Schrittweite τ so wählt, sodass das Richardson Verfahren gegen die exakte Lösung konvergiert. Weiters wähle man eine geeignete relative Fehlergenauigkeit $\varepsilon > 0$ und stelle die Anzahl der Iterationen bezüglich der Dimension n_h grafisch dar.