---

31 Gegeben sei ein Hilbertraum V mit einem abgeschlossenen Teilraum $V_h \subset V$. Für ein $u \in V$ zeige man, dass die folgenden Problemstellungen äquivalent sind

a) Gesucht ist $u_h \in V_h$, sodass

$$\|u - u_h\|_V = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V .$$

b) Gesucht ist $u_h \in V_h$, sodass

$$(u_h, v_h)_V = (u, v_h)_V \qquad \text{für alle } v_h \in V_h.$$

32 Für $V_g = V_0 = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ seien für $a : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen vom Satz von Lax-Milgram erfüllt. Weiters sei $F \in V_0^*$ und V_h sei der Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen mit dem diskreten Teilraum $V_{0,h} = V_0 \cap V_h$. Weiters sei $u \in V_0$ die Lösung des Variationsproblems:

$$\text{Gesucht ist } u \in V_0 : \qquad a(u,v) = F(v) \qquad \text{für alle } v \in V_0.$$

Für eine Folge von Zerlegungen $\{\mathcal{T}_h\}$ mit $h \to 0$ zeige man für die entsprechenden Näherungslösungen $u_h \in V_{0,h}$, dass gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \to 0 \qquad \text{für } h \to 0,$$

auch wenn $u \notin H^2(0,1)$.

Hinweis: Man verwende die Tatsache, dass der Raum $H^2(0,1)$ dicht in $H^1(0,1)$ liegt und benütze weiters das Lemma von Céa.

Programmierteil.

---

33 Man implementiere eine Routine, die effizient ein lineares Gleichungssystem der Form

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$$

löst. Dabei ist $K_h \in \mathbb{R}^{(n_h+1)\times(n_h+1)}$ eine Tridiagonalmatrix, also vom Typ `SMatrix` und $\underline{f}_h \in \mathbb{R}^{n_h+1}$ ein gegebener Lastenvektor. Siehe dazu auch Übungsaufgabe 21.

Man teste diese Routine für ein geeignetes Gleichungssystem und überprüfe die Richtigkeit der berechneten Lösung $\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{n_h+1}$.

34 Man schreibe eine Routine, die den $L^2(a,b)$-Fehler einer berechneten Näherungslösung berechnet. Dazu approximiere man das auftretende Integral mit Hilfe der Mittelpunktsregel, also

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^{n_h} \int_{T_k} |u(x) - u_h(x)|^2 \,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n_h} h_k \, |u(x_k^*) - u_h(x_k^*)|^2 ,$$

wobei $x_k^* := \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ der Mittelpunkt vom Element $T_k = (x_{k-1}, x_k)$ ist.

Man teste diese Routine für eine gegebene Funktion $u \in \mathcal{C}[a,b]$ und berechne den $L^2(a,b)$-Fehler für die Interpolation $u_h = I_h(u)$ im Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen.

$\boxed{35}$ Gegeben sei das Modellproblem

$$-u''(x) = \pi^2 \sin(\pi x) \quad \text{für } x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Man bestimme die exakte Lösung für dieses Modelproblem und zeige $u \in H^1(0,1)$. Man schreibe eine Routine, welches dieses Modellproblem näherungsweise für eine gleichmäßige Zerlegung mit 2^n, $n = 1, \dots, 10, \dots$ Elementen löst. Für diese Näherungslösungen bestimme man den $L^2(0,1)$-Fehler, indem man die Routine von Aufgabe 34 verwendet. Man stelle den Fehler bezüglich der Maschenweite h grafisch dar und vergleiche diese Resultate mit den theoretischen Aussagen aus der Vorlesung.