---

**15** Sei $V$ ein Hilbertraum. Weiters sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine $V$-elliptische und $V$-beschränkte Bilinearform mit dem induzierten linearen Operator $A : V \to V^*$

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) \qquad \text{für alle } u, v \in V.$$

Man zeige für den inversen Operator $A^{-1} : V^* \to V$ die Beschränktheitsabschätzung

$$\langle A^{-1}F, G\rangle \le \frac{c_2^a}{(c_1^a)^2}\|F\|_{V^*}\|G\|_{V^*} \qquad \text{für alle } F, G \in V^*$$

und die Elliptizitätsabschätzung

$$\langle A^{-1}F, F\rangle \ge \frac{c_1^a}{(c_2^a)^2}\|F\|_{V^*}^2 \qquad \text{für alle } F \in V^*.$$

**16** Seien $V$ und $Q$ Hilberträume. Weiters sei $A : V \to V^*$ ein linearer, $V$-elliptischer und $V$-beschränkter Operator, also

$$\langle Au, v\rangle \le c_2^a\|u\|_V\|v\|_V \quad \text{und} \quad \langle Au, u\rangle \ge c_1^a\|u\|_V^2 \qquad \text{für alle } u, v \in V.$$

Weiters sei $B : V \to Q^*$ ein linearer und beschränkter Operator mit der Eigenschaft, dass

$$\sup_{0\ne v\in V}\frac{\langle Bv, q\rangle}{\|v\|_V} \ge c_S\|q\|_Q \qquad \text{für alle } q \in Q.$$

Für den linearen Operator $S := BA^{-1}B^* : Q \to Q^*$, mit dem adjungierten Operator $B^* : Q \to V^*$

$$\langle B^*q, v\rangle = \langle Bv, q\rangle \qquad \text{für alle } q \in V, \text{ und alle } v \in V,$$

zeige man die $Q$-Elliptizität

$$\langle Sq, q\rangle \ge \frac{c_1^a(c_S)^2}{(c_2^a)^2}\|q\|_Q^2 \qquad \text{für alle } q \in Q$$

und die $Q$-Beschränktheit

$$\langle Sp, q\rangle \le \frac{c_2^a(c_2^b)^2}{(c_1^a)^2}\|p\|_Q\|q\|_Q \qquad \text{für alle } p, q \in Q.$$

**17** Sei $V$ ein Hilbertraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine $V$-elliptische und $V$-beschränkte symmetrische Bilinearform mit den speziellen Konstanten $c_1^a = c_2^a = 1$. Für $F \in V^*$ betrachte man das Variationsproblem:

$$\text{Gesucht ist } u \in V: \qquad a(u,v) = \langle F, v\rangle \qquad \text{für alle } v \in V$$

und die zugehörige Fixpunktiteration

$$u_{k+1} = u_k + \tau\mathcal{R}\left[F - Au_k\right] \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0, u_0 \in V \text{ und } \tau = 1.$$

(a) Was ist der Zusammenhang zwischen der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_V$?

(b) Was ist der Zusammenhang zwischen der Riesz-Abbildung $\mathcal{R} : V^* \to V$ und dem aus der Bilinearform induzierten Operator $A : V \to V^*$?

(c) Wieviele Fixpunktiterationen werden benötigt, bis die exakte Lösung angenommen wird?

$\boxed{18}$ Betrachtet werde das Modellproblem 1D aus der Vorlesung mit $g_0 = 0$: Gesucht ist $u \in V_0 = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$, sodass

$$\langle Au, v\rangle := \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x + g_1 v(1) =: \langle F, v\rangle$$

für alle $v \in V_0$ erfüllt ist. Man gebe das zur Operatorgleichung

$$w_k = \mathcal{R}\,[F - Au_k] \qquad \text{in } V$$

zugehörige klassische Modellproblem an. Dabei ist $\mathcal{R} : V_0^* \to V_0$ die Riesz-Abbildung bzgl. dem Raum $V_0$.

$\boxed{19}$ Sei $V_{0,h}$ der Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen die im Punkt $x_0 = 0$ verschwinden. Für $u_h, v_h \in V_{0,h}$ zeige man die Beziehung

$$a(u_h, v_h) = (K_h \underline{u}_h, \underline{v}_h)_{\ell^2},$$

wobei $K_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$ die Steifigkeitsmatrix ist und $\underline{u}_h, \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$ die Koeffizienten zu den zugehörigen Funktionen $u_h, v_h \in V_{0,h}$ sind. Analog dazu zeige man den Zusammenhang für den Lastenvektor

$$\langle \hat{F}, v_h\rangle := \langle F, v_h\rangle - a(g_h, v_h) = (\underline{f}_h, \underline{v}_h)_{\ell^2}.$$

$\boxed{20}$ Man konstruiere quatratische Basisfunktionen $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \mathbb{P}_2(\hat{T})$ für das Referenzelement $\hat{T} = (0,1)$, sodass für die Punkte $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = \frac{1}{2}$ und $\xi_2 = 1$

$$\hat{\varphi}_i(\xi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

für alle $i, j = 0, 1, 2$ gilt. Für diese Basisfunktionen berechne man die Element-Steifigkeitsmatrix am Referenzelement $\hat{T}$

$$\hat{K}_h := \int_{\hat{T}} \underline{\phi}'(\xi)\underline{\phi}'(\xi)^\top \mathrm{d}\xi,$$

wobei $\underline{\phi} := (\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)^\top$ der Vektor der quadratischen Formfunktionen ist.

$\boxed{\text{XX}}$ Als Vorbereitung für den nächsten Übungszettel suche man sich einen C/C$^{++}$ Compiler und einen Editor bzw. eine geeignete Entwicklungsumgebung (Eclipse, Code::Blocks, Visual Studio,... ) nach eigener Wahl. Weiters erstelle man eine Konsolenanwendung, die den folgenden Text ausgibt:

"Numerik ist super!"