P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

"Mathematische Modelle in der Technik"

PS XII 29.1. 2016 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : S2 059): TP VI

3.1.1 Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten

Wir beschäftigen uns mit den stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\frac{\mu}{\varrho}\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\varrho}\nabla p = \mathbf{f} := \mathbf{0} \tag{3.41}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{3.42}$$

TP VIa Schreiben Sie die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.41)-(3.42) in Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \tag{3.43}$$

$$y = r\sin\varphi \tag{3.44}$$

$$z = z \tag{3.45}$$

für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ mit den Komponenten v_r, v_φ und v_z in Richtung der Zylinderkoordinaten.

3.1.2 Die Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern (Couette-Taylor Strömung)

In den Übungsaufgaben TP VIb und TP VIc soll das Strömungsfeld (= Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ und Druckfeld p) zwischen zwei unendlich ausgedehnten, koaxialen Zylindern mit den Radien R_1 und R_2, die sich mit der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 bewegen, bestimmt werden (siehe Abbildung 2). Zur Lösung dieses Problems bieten sich wieder die Zylinderkoordinaten an. In der Übungsaufgabe TP VIa haben wir die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.41)-(3.42) in Zylinderkoordinaten für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ mit den Komponenten v_r, v_φ und v_z in Richtung der Zylinderkoordinaten aufgeschrieben. Offenbar ist nur die φ-Komponente v_φ des Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ von 0 verschieden. Des Weiteren hängen v_φ und auch der Druck p offenbar nicht von φ und z ab, d.h.

$$p = p(r) \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_r(r,\varphi,z) \\ v_\varphi(r,\varphi,z) \\ v_z(r,\varphi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\varphi(r) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

Setzt man diesen Ansatz in die in der Übungsaufgabe TP VIa abgeleiteten, stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten ein, erhält man einfach zu lösende Bestimmungsgleichungen für $v_\varphi(r)$ und $p(r)$.

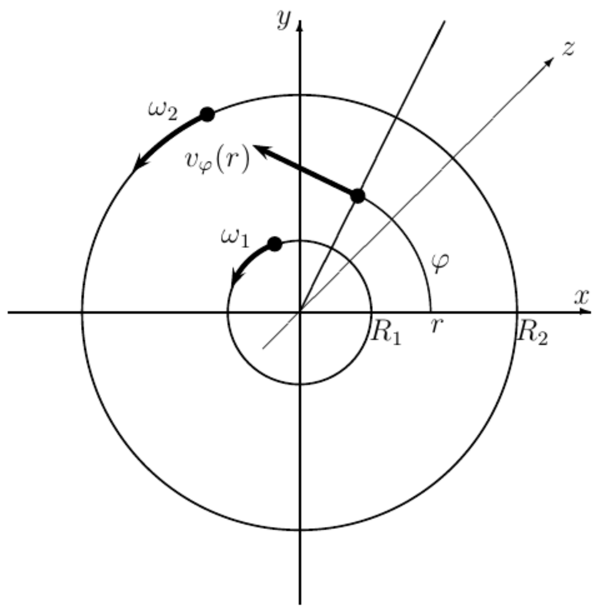


Abbildung 2: Querschnitt durch einen (endlosen) Doppelzylinder mit zwei sich verschieden schnell drehenden Mänteln.

TP VIb Bestimmen Sie $v(r)$!

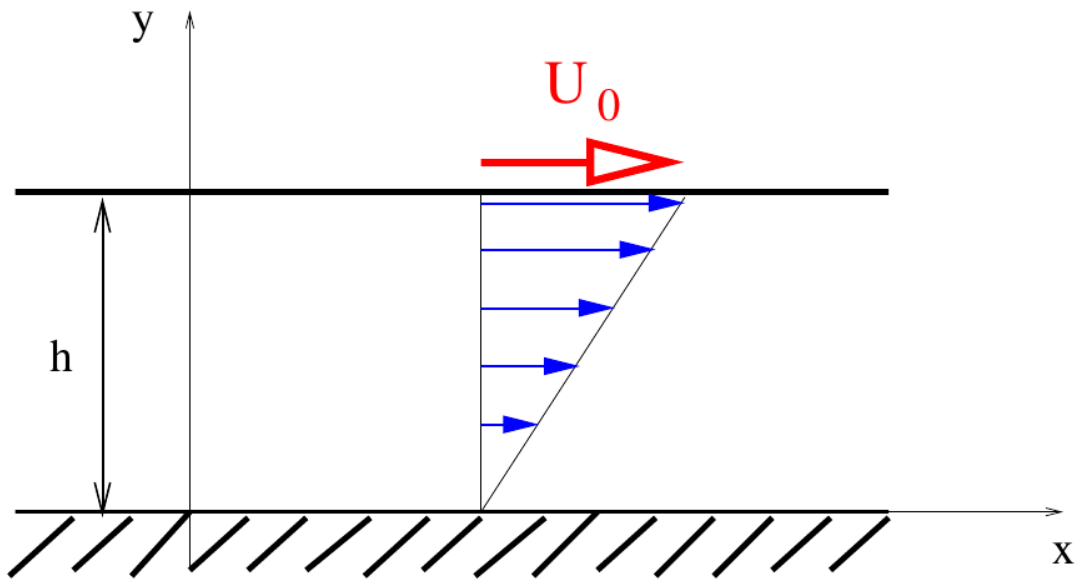
TP VIc Bestimmen Sie $p(r)$!

3.1.3 Die Strömung zwischen zwei Platten

TP VId Man berechne das ebene (die Platten seien in Querrichtung genügend weit ausgedehnt) Strömungsfeld eines inkompressiblen Newton'schen Fluids zwischen zwei Platten, wobei sich eine Platte mit der konstanten Geschwindigkeit $U_0 > 0$ parallel zur anderen Platte bewege (siehe Skizze). Die Strömung sei zeitlich und räumlich voll ausgebildet. Bei welcher H_a - Zahl

$$H_a = \frac{-\frac{dp}{dx}(2h)^2}{U_0 \mu}$$

tritt (bezüglich aus der Skizze ersichtlichen x-Richtung (x_1-Richtung)) teilweise Rückströmung auf ?



Hinweise:

1. Gehen Sie von den 3D Navier-Stokes Gleichungen aus:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=f_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}=f_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial z}=f_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

2. Vereinfachen Sie dann diese Gleichungen unter Beruecksichtigung der Annahmen:
   (a) Die Strömung sei zeitlich voll ausgebildet.
   (b) Die Strömung sei räumlich voll ausgebildet.
   (c) Die Strömung sei eben.
   (d) $f := (f_x, f_y, f_z)^T = 0$.
3. Wie sich zeigt, hängt das Strömungsbild vor allem vom Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$ ab. Skizzieren Sie sich einige Geschwindigkeitsprofile und erklären Sie diese anschaulich !