

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS XI 22.1. 2015 (Zeit : 10¹⁵ – 11⁴⁵ Uhr; Raum : S2 059): **28**, **TP V**

3 Strömungsmechanik

3.1 Transport-Theorem

28 Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 1$, d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(F \cdot v)}{\partial x}(x, t) \right] dx \quad !$$

TP Va Die Vektorfunktion $\varphi : \Omega(t_0) \times (T_1, T_2) \rightarrow R^d$ bildet die Lagrange-Koordinaten (X, t) auf die Euler-Koordinaten (x, t) ab, d.h. $x = \varphi(X, t)$. Man zeige für $d = 2$ und $d = 3$ die Beziehung

$$\frac{\partial D}{\partial t}(X, t) = D(X, t) \operatorname{div}(v(x, t)),$$

wobei D die Determinante der Jacobi-Matrix der Abbildung φ ist, d.h.

$$D(X, t) = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}(X, t) \right).$$

TP Vb Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 2$ bzw. $d = 3$, d.h. die Formeln

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(F \cdot v)(x, t) \right] dx$$

und (Gauß-Theorem)

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\partial\omega(t)} F(x, t)(v(x, t), n(x, t)) ds_x \quad !$$

Literaturhinweis: M. Feistauer, Mathematical Methods in Fluid Dynamics, Longman Scientific Technical, 1993.