P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS X 15.01. 2016 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : S2 059): TP IV

Modellierungsproblem Thermomechanik

In diesem Modellierungsprojekt betrachten wir die Kopplung von thermischen und mechanischen Feldern. Hierbei wird zuerst ein stationäres Temperaturfeld berechnet und weiters die durch den Temperaturgradienten verursachte Verschiebung bestimmt. Somit sind die folgenden Randwertaufgaben zu lösen:

Gesucht ist das Temperaturfeld $T(x)$, für das

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(\lambda(x)\operatorname{grad}T(x)) &= f^T(x) && \text{für alle } x\in\Omega\,,\\
T(x) &= g_1^T(x) && \text{für alle } x\in\Gamma_1^T\,,\\
\frac{\partial T}{\partial N} &= g_2^T(x) && \text{für alle } x\in\Gamma_2^T\,,\\
\frac{\partial T}{\partial N}+\alpha(x)T(x) &= \alpha(x)T_{\mathrm{A}}(x) && \text{für alle } x\in\Gamma_3^T
\end{aligned}$$

gilt, sowie das Verschiebungsfeld $\vec{u}(x)$, welches das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
&-\mu_{\mathrm{e}}\Delta\vec{u}(x)-(\lambda_{\mathrm{e}}+\mu_{\mathrm{e}})\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{u}(x))\\
&\qquad=\vec{f}^{\mathrm{e}}(x)-(3\lambda_{\mathrm{e}}+2\mu_{\mathrm{e}})\,\alpha_\ell(x)\operatorname{grad}T(x)\quad\text{für alle } x\in\Omega
\end{aligned}$$

und die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\vec{u}(x) &= \vec{g}_1^{\mathrm{e}}(x) && \text{für alle } x\in\Gamma_1^{\mathrm{e}}\,,\\
\sigma_{11}n_1+\sigma_{21}n_2+\sigma_{31}n_3 &= g_{21}^{\mathrm{e}}(x) && \text{für alle } x\in\Gamma_2^{\mathrm{e}}\,,\\
\sigma_{12}n_1+\sigma_{22}n_2+\sigma_{32}n_3 &= g_{22}^{\mathrm{e}}(x) && \text{für alle } x\in\Gamma_2^{\mathrm{e}}\,,\\
\sigma_{13}n_1+\sigma_{23}n_2+\sigma_{33}n_3 &= g_{23}^{\mathrm{e}}(x) && \text{für alle } x\in\Gamma_2^{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

erfüllt.

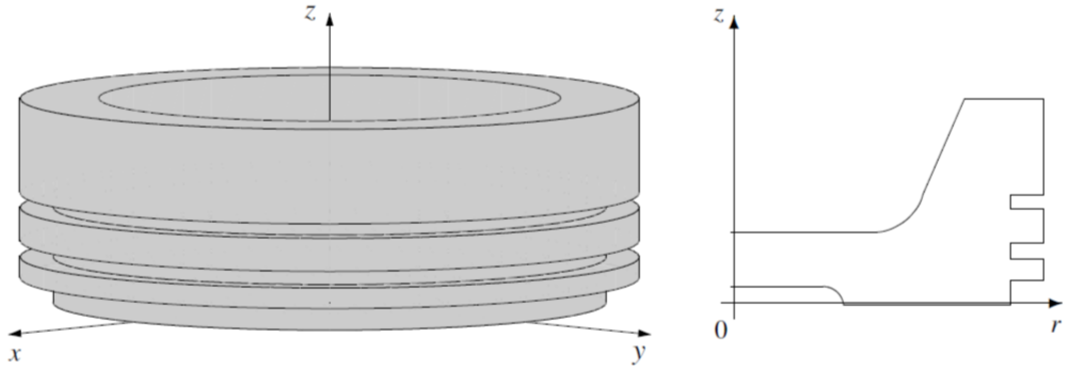

Abbildung 1: Oberer Teil des Kolbens eines Verbrennungsmotors und Meridianebene

Für den Rand des Gebietes Ω gilt $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_1^T \cup \overline{\Gamma}_2^T \cup \overline{\Gamma}_3^T = \overline{\Gamma}_1^{\mathrm{e}} \cup \overline{\Gamma}_2^{\mathrm{e}}$ mit $\Gamma_i^T \cap \Gamma_j^T = \Gamma_1^{\mathrm{e}} \cap \Gamma_2^{\mathrm{e}} = \emptyset$ für $i, j = 1, 2, 3$. Außerdem bezeichnen $\lambda(x)$ den Wärmeleitkoeffizienten, $\alpha(x)$ die Wärmeübergangszahl, $f^T(x)$ die Intensität der Wärmequelle, $T_{\mathrm{A}}(x)$ die Umgebungstemperatur, λ_{e} und μ_{e} die Lamé'schen Elastizitätskonstanten, $\vec{f}^{\mathrm{e}}(x) = (f_1^{\mathrm{e}}(x) \;\; f_2^{\mathrm{e}}(x) \;\; f_3^{\mathrm{e}}(x))^T$ den Vektor der Volumenkräfte, $\vec{g}_1^{\mathrm{e}} = (g_{11}^{\mathrm{e}} \;\; g_{12}^{\mathrm{e}} \;\; g_{13}^{\mathrm{e}})^T$ den Vektor der vorgegebenen Randverschiebungen, $\vec{g}_2^{\mathrm{e}} = (g_{21}^{\mathrm{e}} \;\; g_{22}^{\mathrm{e}} \;\; g_{23}^{\mathrm{e}})^T$ den Vektor der vorgegebenen Oberflächenkräfte, α_ℓ den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten und $\vec{n} = (n_1 \;\; n_2 \;\; n_3)^T$ den Vektor der äußeren Einheitsnormalen. Die Spannungskomponenten bei thermomechanischen Feldern sind durch

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \lambda_{\mathrm{e}} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu_{\mathrm{e}} \varepsilon_{ii} - (3\lambda_{\mathrm{e}} + 2\mu_{\mathrm{e}}) \alpha_\ell T , \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} = 2\mu_{\mathrm{e}} \varepsilon_{ij} , \;\; i, j = 1, 2, 3 , \; i \neq j , \end{aligned}}$$

mit den Komponenten ε_{ij} des Verzerrungstensors definiert.

Wir betrachten wieder den Kolben des Verbrennungsmotors aus den Aufgaben $\boxed{\text{TP I}}$ und betrachten nun zusätzlich zum Temperaturfeld auch das Verschiebungsfeld, das durch die Temperaturänderungen infolge des Verbrennungsprozesses hervorgerufen wird. Wir nehmen an, dass der Kolben rotationssymmetrisch ist und alle Eingangsdaten vom Rotationswinkel unabhängig sind.

Man schreibe das Wärmeleitproblem und das Elastizitätsproblem in Zylinderkoordinaten an.