P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

"Mathematische Modelle in der Technik"

PS VIII 11.12. 2015 (Zeit : $10^{\underline{15}} - 11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : K S2 059): $\boxed{21^\star} - \boxed{24}$

$\boxed{21^\star}$ Für die folgenden, jeweils 4 Schnittebenen

$$\tilde{n}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \tilde{n}^{(2)} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \tilde{n}^{(3)} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\tau_1 = \tau_{\tilde{n}^{(1)}} = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \ \tau_2 = \tau_{\tilde{n}^{(2)}} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \ \tau_3 = \tau_{\tilde{n}^{(3)}} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2},$$
$$\sigma_{\tilde{n}^{(1)}} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \ \sigma_{\tilde{n}^{(2)}} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, \ \sigma_{\tilde{n}^{(3)}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Man zeige, dass die sogenannten Hauptschubspannungen τ_1, τ_2, τ_3 Stationärwerte der Schubspannungen sind !

$\boxed{22}$ Man zeige, dass aus dem dynamischen Momentengleichgewicht $(14)_{\text{dyn}}$ und aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht $(15)_{\text{dyn}}$ in differentieller Form die Symmetrie des Spannungstensors folgt, d.h. $(16)_{\text{dyn}}$ (die Nummern beziehen sich auf die entsprechenden Formelnummern in der Vorlesung) !

2.2.2 Verzerrungszustand

$\boxed{23}$ (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Man zeige, dass die Verzerrungen $\varepsilon_{ij}(v) = 0, \ i,j = 1,2,$ einer Verschiebungsfunktion $v = (v_1, v_2)^T \in [C^2(\Omega)]^2$ genau dann verschwinden, wenn $v \in \mathcal{R}_{2D}$ eine Starrkörperverschiebung ist, wobei

$$\mathcal{R}_{2D} := \left\{ v(x) = a \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + b : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right).$$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Man zeige, dass die Verzerrungen $\varepsilon_{ij}(v) = 0, \ i,j = 1,2,3,$ einer Verschiebungsfunktion $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in [C^2(\Omega)]^3$ genau dann verschwinden, wenn $v \in \mathcal{R}$ eine Starrkörperverschiebung ist, wobei der Unterraum $\mathcal{R} := \{v(x) = a \times x + b : a, b \in R^3\}$ der Starrkörperverschiebungen durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

$\boxed{24}$ Zeigen Sie, dass die Winkeländerung φ_{kl} $(k \neq l)$ zwischen den Linienelementen dx_k und dx_l durch die Formel

$$\sin \varphi_{kl} = \frac{2e_{kl}}{\sqrt{1+2e_{kk}}\sqrt{1+2e_{ll}}}$$

gegeben ist (Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Kosinus des Winkels ψ zwischen den defomierten Linienelementen dx'_k und dx'_l) !