P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

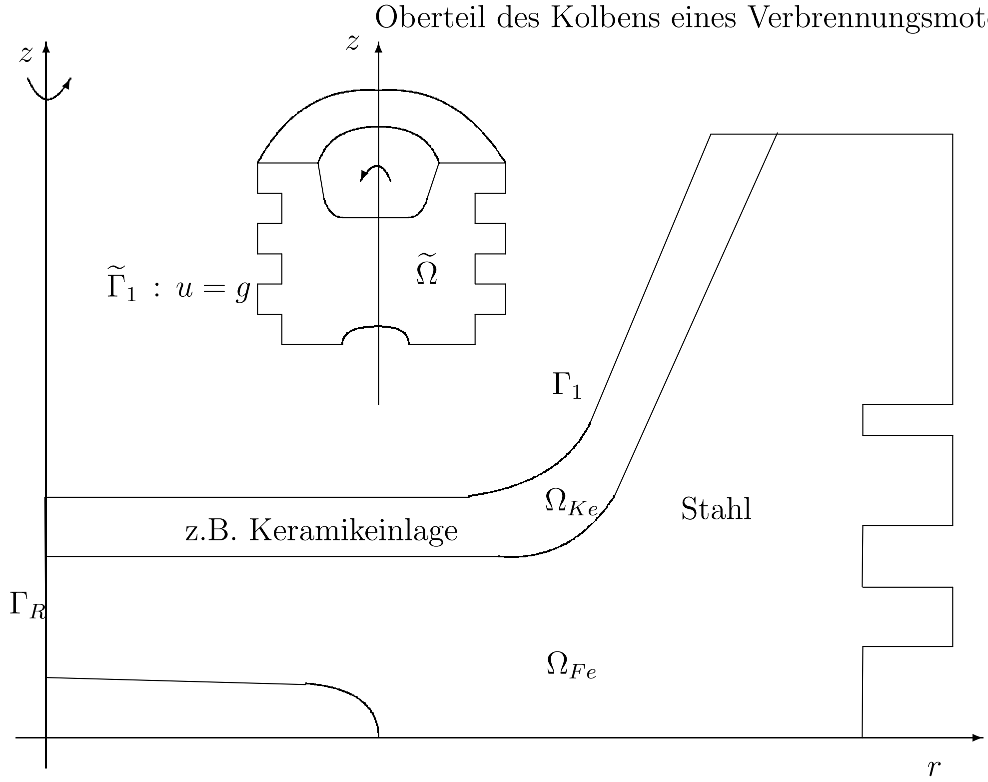
“Mathematische Modelle in der Technik“

$\boxed{\textbf{PS IV}}$ 13.11. 2015 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Raum : S2 059): $\boxed{\text{TP I}}$

1.4 Weitere 1D und 2D Spezialfälle

1.4.1 Rotationssymmetrische Wärmeleitprobleme mit φ-unabhängigen Eingangsdaten (Teamprojekt 1)

○ Modellproblem “*Kolben*“ : Wir betrachten das Wärmeleitproblem für den Oberteil des Kolbens eines Verbrennungsmotors



unter den Voraussetzungen :

1) $\overline{\widetilde{\Omega}} = \circlearrowleft \overline{\Omega} := \left\{ (r,z,\varphi) \,:\, (r,z) \in \overline{\Omega},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\} = \overline{\Omega} \times [0, 2\pi[\,,$
wobei $\Omega = \Omega_{Ke} \cup \Omega_{Fe}$

2) Daten $\{\, \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3\,,\ f\,,\ g\,,\ \dots \}$ sind φ-unabhängig,
wobei (x_1, x_2, x_3)-Kartesische Koordinaten,
(r, z, φ) -Zylinderkoordinaten sind.

Die gesuchte Temperaturverteilung $u(x_1, x_2, x_3) = u(r, z)$ ist damit φ-unabhängig.

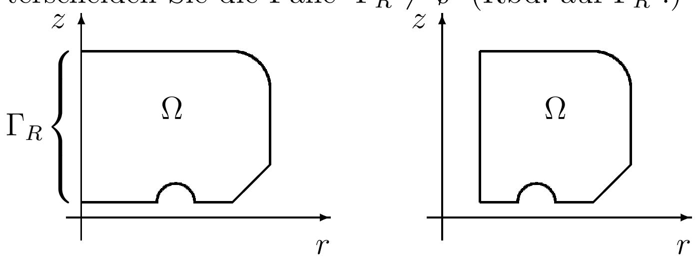
$\boxed{\text{TP Ia}}$ Man schreibe die Wärmeleitgleichung

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \;=\; f(x) \quad x \in \widetilde{\Omega} \\ \text{mit den Randbedingungen} \\ u \;=\; g_1 \quad \text{auf} \quad \widetilde{\Gamma}_1 \;=\; \Gamma_1 \times [0, 2\pi) \\ -\lambda\frac{\partial u}{\partial n} \;=\; g_2 \quad \text{auf} \quad \widetilde{\Gamma}_2 \;=\; \Gamma_2 \times [0, 2\pi) \\ -\lambda\frac{\partial u}{\partial n} \;=\; \alpha(u - g_3) \quad \text{auf} \quad \widetilde{\Gamma}_3 \;=\; \Gamma_3 \times [0, 2\pi) \end{array}\right\} \qquad (1.29)$$

für den rotationssymmetrischen Fall $\overline{\widetilde{\Omega}} = \overline{\Omega} \times [0, 2\pi)$ mit φ-unabhängigen Eingangsdaten $\{\lambda, f, g_i, \alpha\}$ auf, d.h. durch den Übergang von den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) zu Zylinderkoordinaten (r, z, φ) mittels

$$x_1 \;=\; r\cos\varphi\,, \quad x_2 \;=\; r\sin\varphi\,, \quad x_3 \;=\; z$$

kann der 3D-RWA in $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2D-RWA im Gebiet Ω zugeordnet werden. Unterscheiden Sie die Fälle $\Gamma_R \neq \emptyset$ (Rbd. auf Γ_R !) und $\Gamma_R = \emptyset$ (Gebiet mit Loch).



Hinweis: Für die Randbedingungen 2. und 3. Art muss auch der Normalvektor von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten transformiert werden!

$\boxed{\text{TP Ib}}$ Man schreibe die differentielle Form der Wärmeleitgleichung für das Modellproblem "*Kolben*" Querschnittsgebiet (2D) auf. Beachten Sie das Vorhandensein eines Interfaces zwischen Stahl und Keramikeinlage (Interface-Bedingung).

$\boxed{\text{TP Ic}}$ Leiten Sie die **Variationsformulierung**

$$\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u,v) = < F, v > \qquad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \qquad (1.30)$$

$$\begin{array}{ll} \text{d.h.,} & \mathbf{V}_g = \,? \\ & \mathbf{V}_0 = \,? \\ & a(u,v) = \,? \\ & < F, v > = \,? \end{array}$$

her !

$\boxed{\text{TP Id}}$ Man zeige, dass eine hinreichend glatte (genaue Angabe der geforderten Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften) Lösung $u \in \mathbf{V}_g$ des Variationsproblems (1.34) das klassische Randwertproblem (d.h. PDgl., Interfacebedingungen, Randbedingungen) löst ! Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang auch die Beziehungen zwischen Integralbilanzformulierung und Variationsformulierung !