P R O S E M I N A R

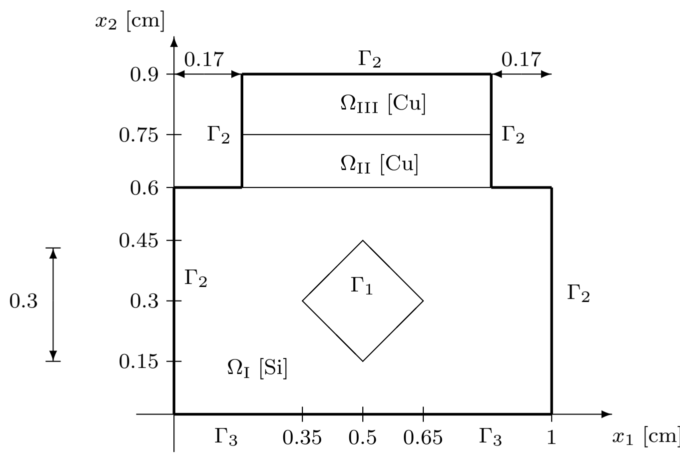
zur Vorlesung

"Mathematische Modelle in der Technik"

PS III 06.11. 2015 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Raum : S2 059): 10 - 13

1.3 Wärmeleitung in einer dünnen Platte

- **Physikalisches Problem :** Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{III}}$, in einer dünnen Platte „CHIP" der Art



mit einer Plattendicke von $d = 0.01$ cm und mit den Daten

- Wärmeleitkoeffizienten

$$\Lambda(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isotrop}}}{=} \lambda(x)\, I_2 \quad \text{mit} \quad \lambda(x) := \begin{cases} \lambda_{\mathrm{Si}} = 0.01 \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}\, K}\right], & x \in \bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \\ \lambda_{\mathrm{Cu}} = 3.95 \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}\, K}\right], & x \in \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{III}} \end{cases}$$

- $a \equiv 0$ (kein Wärmeaustausch in z-Richtung),
- Wärmequellen:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \Omega_{\mathrm{I}} \cup \Omega_{\mathrm{III}}, \\ -1\,[W/\mathrm{cm}^3]\,, & x \in \Omega_{\mathrm{II}} (\text{Kühlung}), \end{cases}$$

- Randbedingungen (RB) auf $\Gamma \equiv \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$:
  1. Γ_1 = Rand des Loches: $u = g_1 := 300\, K$,
  2. $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_3)$: $\dfrac{\partial u}{\partial N} = g_2 := 0$ auf Γ_2 (Wärmeisolation),
  3. $\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1,\ x_2 = 0\}$: $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \alpha(g_3 - u)$ auf Γ_3
     mit $g_3 = 25^o\, C$, $\alpha = 0.2\,[W/(\mathrm{cm}^2\, K)]$.

$\boxed{10}$ Man leite die stationäre Wärmeleitgleichung zur Bestimmung der Temperaturverteilung $u(x)$ in der **integralen Form** (= Bilanzform) her.

$\boxed{11}$ Geben Sie die **klassische Formulierung**, d.h. die PDgl. in Ω_{I}, Ω_{II} und Ω_{III}, die Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{II}}$ und $\bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{III}}$ sowie die Randbedingungen an !

$\boxed{12}$ Leiten Sie die **Variationsformulierung** in der Form

$$\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h.,}\quad & \mathbf{V}_g = ? \\ & \mathbf{V}_0 = ? \\ & a(u,v) = ? \\ & < F, v > = ? \end{aligned}$$

her.

$\boxed{13}$ Man zeige, dass eine hinreichend glatte (genau Angabe der geforderten Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften) Lösung $u \in \mathbf{V}_g$ des Variationsproblems (1.23) das klassische Randwertproblem (d.h. PDgl. in Ω_{I}, Ω_{II} und Ω_{III}; Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{II}}$ und $\bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{III}}$; Randbedingungen) löst !