P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik”

PS I 16.10.2015 (Zeit : $10^{\underline{15}} - 11^{\underline{45}}$) Raum : S2 059 : $\boxed{1}$ - $\boxed{5}$

1 Wärmeleit- und Wärmetransportprobleme

1.1 Analytische Hilfsmittel

$\boxed{1}$ Zeigen Sie, dass für $f \in C(a,b)$ und $x \in (a,b)$ gilt:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\triangle x} \int\limits_{x-\frac{\triangle x}{2}}^{x+\frac{\triangle x}{2}} f(\xi)\, d\xi \quad = \quad f(x)$$

$\boxed{2}$ Man zeige, dass
a)

$$\lim_{\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3 \to 0} \frac{1}{\triangle x_1 \triangle x_2 \triangle x_3} \int\limits_{x_1-\frac{\triangle x_1}{2}}^{x_1+\frac{\triangle x_1}{2}} \int\limits_{x_2-\frac{\triangle x_2}{2}}^{x_2+\frac{\triangle x_2}{2}} \int\limits_{x_3-\frac{\triangle x_3}{2}}^{x_3+\frac{\triangle x_3}{2}} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_3\, d\xi_2\, d\xi_1 \quad = \quad f(x_1, x_2, x_3)$$

gilt, falls $f \in C(\Omega)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$,

b)

$$\lim_{\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3 \to 0} \frac{1}{\triangle x_1 \triangle x_2 \triangle x_3} \int\limits_{x_1-\frac{\triangle x_1}{2}}^{x_1+\frac{\triangle x_1}{2}} \int\limits_{x_2-\frac{\triangle x_2}{2}}^{x_2+\frac{\triangle x_2}{2}} \Big[\sigma(\xi_1, \xi_2, x_3 + \frac{\triangle x_3}{2}) - \sigma(\xi_1, \xi_2, x_3 - \frac{\triangle x_3}{2}) \Big]\, d\xi_2\, d\xi_1 \quad = \quad \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_3}$$

gilt, falls $\sigma \in C^1(\Omega)$.

$\boxed{3}$ Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen (V1) - (V4), siehe (1.3) in der Vorlesung, aus der Wärmemengebilanz (1.1) folgt, dass $W \in C^1(a,b)$!

$\boxed{4}$ Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung der Wärmeleitgleichung (1.4) auch eine Lösung der Wärmeleitgleichung (1.2) in integraler Form ist !

1.2 Analytische Lösung und Parameterstudien

$\boxed{5}$ Bestimmen Sie die von einem (fixierten) Parameter $y \in (0,1)$ abhängige Lösung $u_y(\cdot)$ der Randwertaufgabe (Wärmeleitproblem mit Punktquelle)

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \delta(x-y),\ x \in (0,1) \qquad (f_y = 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy,\ x \in [0,1]$$

mit $G(x,y) := u_y(x)$ die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

wobei f eine gegebene stetige Funktion ist.