Im allgemeinen Fall $i \geq k$ erhält man entsprechende Abschätzungen für den Fehler von T_{ik} einfach dadurch, daß man in (3.5.6), (3.5.7) $z_0, z_1, \dots, z_k$ durch $z_{i-k}, z_{i-k+1}, \dots, z_i$, und h_0 durch h_{i-k} ersetzt, weil T_{ik} durch Extrapolation aus $T(h_j)$, $j = i-k, i-k+1, \dots, i$, gewonnen wird. Man erhält so unter Berücksichtigung von $z_j = h_j^\gamma$ allgemein für Schrittweitenfolgen $\{h_j\}$ mit (3.5.3), für $i \geq k$ und $k = m$

$$(3.5.8) \qquad |T_{im} - \tau_0| \leq M_{m+1} C_m h_{i-m}^\gamma h_{i-m+1}^\gamma \cdots h_i^\gamma,$$

und für $k < m$

$$(3.5.9) \qquad T_{ik} - \tau_0 = (-1)^k h_{i-k}^\gamma h_{i-k+1}^\gamma \cdots h_i^\gamma (\tau_{k+1} + O(h_{i-k}^\gamma)).$$

Also gilt für festes $k \leq m$ asymptotisch für $i \to \infty$

$$T_{ik} - \tau_0 = O(h_{i-k}^{(k+1)\gamma}),$$

d.h. die Elemente T_{ik} der $(k+1)$-ten Spalte des (3.4.4) entsprechenden Tableaus konvergieren gegen τ_0 wie bei einem Verfahren der Ordnung $(k+1)\gamma$. Je größer also γ ist, desto bessere Resultate liefert der Extrapolationsalgorithmus. Darin liegt die Bedeutung derjenigen Diskretisierungsverfahren, deren asymptotische Entwicklung (3.5.1) nur gerade h-Potenzen enthält [wie z.B. die Entwicklung (3.4.1) der Trapezsumme oder des zentralen Differenzenquotienten in diesem Abschnitt].

Aus der Fehlerformel (3.5.9) kann man ferner schließen, daß der Fehler $T_{ik} = \tau_0$ für festes $k < m$ für genügend großes i konstantes Vorzeichen besitzt, falls $\tau_{k+1} \neq 0$, daß also T_{ik} schließlich für $i \to \infty$ monoton gegen τ_0 konvergiert. Für genügend großes i gilt dann wegen (3.5.9)

$$0 < \frac{T_{i+1,k} - \tau_0}{T_{i,k} - \tau_0} \approx \frac{h_{i+1}^\gamma}{h_{i-k}^\gamma} \leq b^{\gamma(k+1)}.$$

In vielen Fällen ist nun $b^{\gamma(k+1)} < \frac{1}{2}$. Für die Fehler der Größen

$$U_{ik} := 2T_{i+1,k} - T_{ik}$$

folgt

$$U_{ik} - \tau_0 = 2(T_{i+1,k} - \tau_0) - (T_{ik} - \tau_0)$$

und daher wegen $s := \text{sign}\,(T_{i+1,k} - \tau_0) = \text{sign}\,(T_{ik} - \tau_0)$ die Abschätzung

$$s(U_{ik} - \tau_0) = 2|T_{i+1,k} - \tau_0| - |T_{ik} - \tau_0| \approx -|T_{ik} - \tau_0| < 0.$$

Ein Vergleich der Fehler von T_{ik} und U_{ik} zeigt daher, daß für genügend großes i und festes k die Größen $T_{ik} - \tau_0$, $U_{ik} - \tau_0$ ungefähr gleich großen

Betrag aber entgegengesetztes Vorzeichen haben, daß also T_{ik} und U_{ik} für genügend großes i des gesuchte Resultat τ_0 einschließen und von verschiedenen Seiten her monoton gegen τ_0 konvergieren. Man kann dieses Verhalten der T_{ik} und U_{ik} benutzen, um die Größe des Fehlers $T_{ik} - \tau_0$ bzw. $U_{ik} - \tau_0$ abzuschätzen, und damit ein Abbruchkriterium gewinnen.

Beispiel: Der exakte Wert des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} 5(e^\pi - 2)^{-1} e^{2x} \cos x \, dx$$

ist 1. Verwendet man als Polynom-Extrapolationsverfahren das Verfahren von Romberg (s. 3.4), so erhält man bei 12-stelliger Rechnung folgende T_{ik}, U_{ik} für $0 \leq i \leq k \leq 6$, $0 \leq k \leq 3$:

i	T_{i0}	T_{i1}	T_{i2}	T_{i3}
0	0.185 755 068 924			
1	0.724 727 335 089	0.904 384 757 145		
2	0.925 565 035 158	0.992 510 935 182	0.998 386 013 717	
3	0.981 021 630 069	0.999 507 161 706	0.999 973 576 808	0.999 998 776 222
4	0.995 232 017 388	0.999 968 813 161	0.999 999 589 925	1.000 000 002 83
5	0.998 806 537 974	0.999 998 044 836	0.999 999 993 614	1.000 000 000 02
6	0.999 701 542 775	0.999 999 877 709	0.999 999 999 901	1.000 000 000 00

i	U_{i0}	U_{i1}	U_{i2}	U_{i3}
0	1.263 699 601 26			
1	1.126 402 735 23	1.080 637 113 22		
2	1.036 478 224 98	1.006 503 388 23	1.001 561 139 90	
3	1.009 442 404 71	1.000 430 464 62	1.000 025 603 04	1.000 001 229 44
4	1.002 381 058 56	1.000 027 276 51	1.000 000 397 30	0.999 999 997 211
5	1.000 596 547 58	1.000 001 710 58	1.000 000 006 19	0.999 999 999 978
6	1.000 149 217 14	1.000 000 107 00	1.000 000 000 09	1.000 000 000 00

3.6 Die Gaußsche Integrationsmethode

In diesem Abschnitt betrachten wir allgemeiner als bisher Integrale der Form

$$I(f) = \int_a^b \omega(x) f(x) dx,$$

wobei $\omega(x)$ eine gegebene nichtnegative *Gewichtsfunktion* auf dem Intervall $[a, b]$ ist. Dabei lassen wir auch unendliche Intervalle wie $[0, \infty]$ oder $[-\infty, \infty]$ zu. Die Gewichtsfunktion soll folgende Voraussetzungen erfüllen