Numerik Partieller Differentialgleichungen WS 2014 / 15
12. Übung Montag, 26. Jänner 2015, 10.15–11.45, S2 054

Für die folgenden Aufgaben seinen zwei seperable Hilberträume V und H gegeben, mit den Eigenschaften:

- $V \subset H$ liegt dicht in H.
- Es existiert eine Konstante $c > 0$, mit
$$\|v\|_H \leq c\|v\|_V \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Wir betrachten dann das Variationsproblem: Gesucht ist $u \in H^1((0,T), V; H)$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) &= \langle F(t), v\rangle && \forall v \in V \quad \forall t \in (0,T) \text{ fast überall}, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } H \end{aligned} \tag{12.1}$$

erfüllt ist.

$\boxed{63}$ Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $u \in H^1((0,T), V; H)$ eine Lösung von (12.1) ist, genau dann wenn $u_\lambda \in H^1((0,T), V; H)$ Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_\lambda(t), v)_H + a_\lambda(u_\lambda(t), v) &= \langle F_\lambda(t), v\rangle && \forall v \in V \quad \forall t \in (0,T) \text{ fast überall}, \\ u_\lambda(0) &= u_0 && \text{in } H \end{aligned} \tag{12.2}$$

ist, mit

$$u_\lambda(t) = e^{-\lambda t}u(t), \qquad a_\lambda(u,v) = a(u,v) + \lambda(u,v)_H, \qquad F_\lambda = e^{-\lambda t}F(t).$$

$\boxed{64}$ Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine V-beschränkte Bilinearform. Man zeige, falls eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass die Gårding-Ungleichung

$$a(v,v) + \lambda\|v\|_H^2 \geq c_1^a\|v\|_V^2 \qquad \forall v \in V,$$

erfüllt ist, dann ist das Problem (12.1) eindeutig lösbar für jedes $F \in L^2((0,T), V^*)$ und $u_0 \in H$.

$\boxed{65}$ Man zeige, es existiert eine Konstante $c_{tr} > 0$, sodass die Ungleichung

$$\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_H \leq c_{tr}\|v\|_{H^1((0,T),V;H)}$$

für alle $v \in \mathcal{C}^1([0,T], V)$ erfüllt ist.

$\boxed{66}$ Sei $V_h \subset V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ der Raum der stetigen und stückweise linearen Funktionen bezüglich einer gleichmäßigen Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ mit der Maschenweite $h > 0$. Für die nodalen Basisfunktionen $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_h}$ seien weiters die Massematrix und die Steifigkeitsmatrix gegeben durch

$$M_h := \left[\int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x\right]_{i,j=1}^{n_h} \quad \text{und} \quad K_h := \left[\int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\mathrm{d}x\right]_{i,j=1}^{n_h}.$$

Für die Matrix $M_h^{-1}K_h$ gebe man eine Abschätzung in der Operatornorm

$$\left\|M_h^{-1}K_h\right\|_{M_h} := \sup_{\underline{0}\neq\underline{v}_h\in\mathbb{R}^{n_h}} \frac{\left(M_h^{-1}K_h\underline{v}_h, \underline{v}_h\right)_{M_h}}{\left(\underline{v}_h, \underline{v}_h\right)_{M_h}}, \quad \left(\underline{v}_h, \underline{v}_h\right)_{M_h} := \left(M_h\underline{v}_h, \underline{v}_h\right)_{\ell^2} \forall \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$$

an.

Programmierteil.

$\boxed{67}$ Man implementiere eine Routine, die die Anwendung des MDS-Vorkonditionierers von Aufgabe 59 realisiert. Dazu stelle man für eine gegebene Hierarchie die Steifigkeitsmatrizen auf und berechne die Inverse der Diagonalmatrizen. Weiters wird die Realisierung der Transferoperatoren $I_\ell^{\ell+1}$ bzw. $I_{\ell+1}^{\ell}$ benötigt, siehe dazu Aufgabe 57 und Aufgabe 58.

$\boxed{68}$ Man verwende das vorkonditionierte CG-Verfahren um die linearen Gleichungssysteme von Aufgabe 49 näherungsweise zu lösen. Dazu verwende man den Vorkonditionierer von Aufgabe 67. Weiters stelle man die Anzahl der benötigten CG-Iterationen bezüglich der Dimension n_h grafisch dar.