

- 46] Betrachtet werde die Steifigkeitsmatrix  $K_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$  vom Modellproblem 1D für eine gleichmäßige Zerlegung  $\mathcal{T}_h$ , also  $h_k = h$  für  $k = 1, \dots, n_h$ . Man zeige, dass die in der Vorlesung gezeigte Abschätzung für die Konditionszahl  $\kappa(K_h)$  scharf bezüglich der Maschenweite  $h$  ist. Das heißt, man zeige die Abschätzung

$$\kappa(K_h) \geq Ch^{-2},$$

mit einer Konstanten  $C > 0$ , die nicht von der Maschenweite  $h$  abhängt.

*Hinweis:* Man betrachte den Rayleigh-Quotienten für spezielle Vektoren um die extremalen Eigenwerte geeignet abzuschätzen.

- 47] Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix. Für die Matrix  $M_\tau := I - \tau A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\tau \in \mathbb{R}$  zeige man

$$\|M_\tau\|_{\ell^2} = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |1 - \tau\lambda| = q(\tau),$$

mit  $q(\tau) := \max\{|1 - \tau\lambda_{\min}(A)|, |1 - \tau\lambda_{\max}(A)|\}$ . Weiters sei die Matrix  $A$  zusätzlich indefinit mit mindestens einem positiven und einem negativen Eigenwert. Für diesen Fall zeige man die Abschätzung

$$\|M_\tau\|_{\ell^2} > 1 \quad \text{für } \tau \neq 0.$$

### Programmierteil.

- 48] Man implementiere eine Routine, die das Richardson Verfahren für die Klasse `SMatrix` realisiert. Es soll möglich sein, die relative Genauigkeit für das Abbruchkriterium einzustellen bzw. soll es weiters möglich sein, eine maximale Anzahl von Iterationen vorzugeben.

Man teste diese Routine an einem geeignetem Beispiel.

- 49] Gegeben sei das Modellproblem

$$-u''(x) = -2 \text{ für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Man löse dieses Gleichungssystem näherungsweise für eine gleichmäßige Zerlegung mit  $2^n$ ,  $n = 1, \dots, 10, \dots$  Elementen. Dabei löse man das Gleichungssystem mit dem Richardson Verfahren, wobei man die Schrittweite  $\tau$  so wählt, sodass das Richardson Verfahren gegen die exakte Lösung konvergiert. Weiters wähle man eine geeignete relative Fehlergenauigkeit  $\varepsilon > 0$  und stelle die Anzahl der Iterationen bezüglich der Dimension  $n_h$  grafisch dar.

- 50] Man implementiere eine Routine, die das Gradientenverfahren für die Klasse `SMatrix` realisiert. Es soll möglich sein, die relative Genauigkeit für das Abbruchkriterium einzustellen bzw. soll es weiters möglich sein, eine maximale Anzahl von Iterationen vorzugeben.

Man teste diese Routine an einem geeignetem Beispiel.

- 51 Man betrachte das gleiche Modellproblem wie in Aufgabe 51 mit der selben Finite Elemente Diskretisierung. Jedoch verwende man hier das Gradientenverfahren um die auftretenden Gleichungssystem zu lösen. Für die selbe relative Fehlergenauigkeit  $\varepsilon > 0$  wie in Aufgabe 51 vergleiche man die Iterationszahlen des Gradientenverfahrens mit den Iterationszahlen des Richardson Verfahrens.