

**40** Gegeben sei ein Lipschitz-Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  mit dem Rand  $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ . Für das  $d$ -dimensionale Modellproblem: Gesucht ist  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + \underline{b} \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ (A(x)\nabla u(x)) \cdot \underline{n}(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

leite man eine Variationsformulierung her. Dabei sind  $f, g_D$  und  $g_N$  skalare Funktionen und  $A : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\underline{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  genügend reguläre Koeffizienten.

**41** Gegeben sei das  $d$ -dimensionale Modellproblem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\nabla u(x)) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ \nabla u(x) \cdot \underline{n}(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

mit  $|\Gamma_D| > 0$ . Für die zugehörige Variationsformulierung zeige man für  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g_N \in L^2(\Gamma_N)$  und  $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$  die  $H^1(\Omega)$ -Beschränktheit und  $V_0$ -Elliptizität der Bilinearform  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiters zeige man, dass das zugehörige linear Funktional  $F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt ist.

**42** Betrachtet werde die Funktion

$$u(x, y) = \sqrt[4]{-\log(\sqrt{x^2 + y^2})}$$

auf dem zweidimensionalen Gebiet

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 0.5\}.$$

Man zeige, dass diese Funktion im Raum  $H^1(\Omega)$  liegt, also  $u \in H^1(\Omega)$ . Ist die Funktion  $u$  stetig?

*Hinweis:* Man transformiere die auftretenden Integrale mit Hilfe der Polarkoordinaten und berechne die jeweiligen Normen.

**43** Betrachtet werde das zweidimensionale Referenzelement

$$\hat{T} := \{\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : \xi^{(1)} > 0, \xi^{(2)} > 0 \text{ und } 1 - \xi^{(1)} - \xi^{(2)} > 0\}.$$

Für die Knoten  $\xi_1 := (0, 0)$ ,  $\xi_2 := (1, 0)$  und  $\xi_3 := (0, 1)$  bestimme man die linearen Formfunktionen  $\hat{\varphi}_i : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$  mit der Eigenschaft, dass

$$\hat{\varphi}_i(\xi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{für alle } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Weiters berechne man für diese Formfunktionen die lokale Steifigkeitsmatrix

$$\hat{K} := [K_{ij}]_{i,j=1}^3, \quad \text{mit } K_{ij} = \int_{\hat{T}} \nabla \hat{\varphi}_j \cdot \nabla \hat{\varphi}_i \, dx \quad \text{für } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

---

## Programmierteil.

---

**44** Gegeben sei das Modellproblem

$$-u''(x) = \pi^2 \sin(\pi x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Man bestimme die exakte Lösung für dieses Modellproblem und zeige  $u \in H^1(0, 1)$ .

Man schreibe eine Routine, welche dieses Modellproblem näherungsweise für eine gleichmäßige Zerlegung mit  $2^n$ ,  $n = 1, \dots, 10, \dots$  Elementen löst. Für diese Näherungslösungen bestimme man den  $L^2(0, 1)$ -Fehler, indem man die Routine von Aufgabe 39 verwendet. Man stelle den Fehler bezüglich der Maschenweite  $h$  grafisch dar und vergleiche diese Resultate mit den theoretischen Aussagen aus der Vorlesung.

**45** Für die Klasse **SMatrix** implementiere man die Matrix-Vektor-Multiplikation. Dazu soll der Operator `*` überladen werden, d.h. man implementiere eine Methode der Bauart

```
Vector operator*(const Vector &x) const;
```

welche den Vektor der Matrix-Vektor-Multiplikation zurückgibt. Man teste diese Routine an einem geeigneten Beispiel.