$\boxed{07}$ Betrachtet werde das Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) \qquad \text{für } x \in (0,1),\\ u(0) &= g_0,\\ u(1) &= g_1. \end{aligned}$$

Man transformiere dieses Randwertproblem auf eines mit homogenen Randdaten und gebe davon die Variationsformulierung an.

$\boxed{08}$ Man betrachte die Funktion

$$u(x) = x^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $u \in L^2(0,1)$ bzw. $u \in H^1(0,1)$?

$\boxed{09}$ Betrachtet werde das Neumann-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \qquad \text{für } x \in (0,1),\\ -u'(0) &= g_0,\\ u'(1) &= g_1. \end{aligned}$$

Für dieses Randwertproblem leite man eine Variationsformulierung her:

Gesucht ist $u \in V_g$, sodass

$$a(u,v) = \langle F, v\rangle \qquad \text{für alle } v \in V_0 \tag{2.1}$$

erfüllt ist.

Weiters zeige man die folgenden Aussagen.

(a) Falls das Variationsproblem (2.1) eine Lösung besitzt, dann gilt

$$\langle F, c\rangle = 0 \qquad \text{für alle } c \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

(b) Falls $u \in V_g$ eine Lösung des Variationsproblems (2.1) ist, dann ist $\hat{u} := u + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ auch eine Lösung.

(c) Für die Wahl $c = -\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x$, gilt

$$\hat{u} \in \hat{V} := \left\{ v \in H^1(0,1) : \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

(d) Falls die Bedingung (2.2) erfüllt ist, dann ist die Lösung des Variationsproblems:

Gesucht ist $\hat{u} \in \hat{V}$, sodass

$$a(\hat{u},\hat{v}) = \langle F, \hat{v}\rangle \qquad \text{für alle } \hat{v} \in \hat{V}$$

erfüllt ist,

auch eine Lösung des Variationsproblems (2.1).

$\boxed{10}$ Man zeige die Poincaré-Ungleichung: Es existiert eine Konstante $c_P > 0$, sodass gilt

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq c_P \left[|u|^2_{H^1(0,1)} + \left(\int_0^1 v(x)\mathrm{d}x \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für alle } v \in H^1(0,1).$$

Hinweis: Man integriere die Gleichung

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(z)\mathrm{d}z$$

bezüglich x über das Intervall $(0,1)$.

$\boxed{11}$ Man zeige, dass das Variationsproblem (2.1) genau dann eine Lösung besitzt, wenn die Lösbarkeitsbedingung

$$\langle F, c \rangle = 0 \qquad \text{für alle } c \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist. Unter dieser Bedingung zeige man, dass eine Lösung des Variationsproblems (2.1) bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Man verwende die Poincaré-Ungleichung um die $\hat{V}$-Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ zu zeigen.

$\boxed{12}$ Betrachtet werde das zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) && \text{für } x \in (0,1), \\ -u'(0) &= g_0 - \alpha_0 u(0), \\ u'(1) &= g_1 \end{aligned}$$

zugehörige Variationsproblem mit den geeigneten Räumen V_0 und V_g. Man zeige für $\alpha_0 > 0$, dass die zum Variationsproblem zugehörige Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ V_0-elliptisch ist.
Hinweis: Man verwende die Ungleichung $\frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(0,1)} \leq \|v - v(0)\|^2_{L^2(0,1)} + |v(0)|^2$ in Kombination mit der Friedrichs-Ungleichung.