P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS X 29.1. 2015 (Zeit : $10^{\underline{15}} - 11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : K 001A): 24 – 26

3.2 Spezielle Strömungen

3.2.1 Poiseuille Strömung in einem Rohr

Um die Flüssigkeitsmenge

$$Q = \int_{y^2+z^2 \le R} v(y,z)\,\rho\,dy\,dz \tag{3.7}$$

zu bestimmen, die pro Sekunde durch den Querschnitt (y-z-Ebene) eines Rohrs (die x-Achse liegt in der Mitte des Rohres) der Länge ℓ mit dem Radius R fliesst (siehe Abbildung 2), benötigen wir das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$, das aus den stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\frac{\mu}{\varrho}\triangle\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\varrho}\nabla p = \mathbf{f} := \mathbf{0} \tag{3.8}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{3.9}$$

und der Haftbedingung am Rohrrand hergeleitet werden kann. Es sollen keine äusseren Kräfte wirken, d.h. $\mathbf{f} := \mathbf{0}$. Die Strömung wird nur durch die gegebene Druckdifferenz Δp zwischen den beiden Rohrenden hervorgerufen. Dann hat offenbar die Geschwindigkeit nur eine Komponente in x-Richtung, welche nicht von x abhängt, d.h.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v(y,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

24 Man zeige, dass der Druck die Form

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{\ell}x + c_0 \tag{3.11}$$

hat, wobei $c_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist und Δp der Druckunterschied zwischen Rohr-Anfang und -Ende. Weiters zeige man, dass $v(y,z)$ die folgende Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet'schen Randbedingungen löst:

$$-\triangle v(y,z) = \frac{\Delta p}{\ell\mu} \quad \forall (y,z) \in (y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+z^2 < R^2, \tag{3.12}$$

$$v(y,z) = 0 \quad \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+z^2 = R^2. \tag{3.13}$$

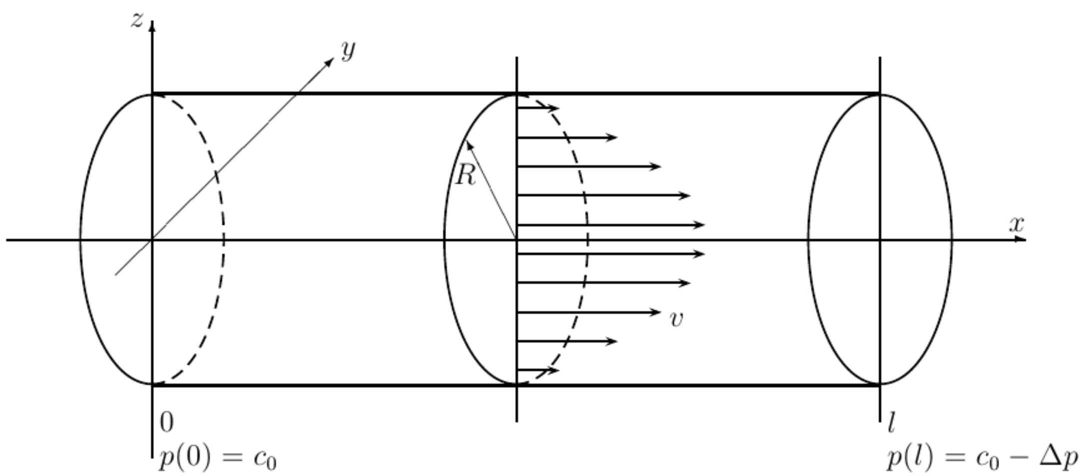

Abbildung 2: Geschwindigkeitsverteilung v einer Flüssigkeit durch ein Rohr.

$\boxed{25}$ Das Randwertproblem (3.12) - (3.13) ist offenbar radialsymmetrisch. Bestimmen Sie die Lösung $v(y,z) = \tilde{v}(r)$, die offenbar nur vom Radius r abhängt, indem Sie das Randwertproblem (3.12) - (3.13) in Polarkoordinaten

$$y = r\cos\varphi \tag{3.14}$$
$$z = r\sin\varphi \tag{3.15}$$

überführen.

$\boxed{26}$ Bestimmen Sie nun die Flüssigkeitsmenge Q, die pro Sekunde durch den Querschnitt des Rohrs fliesst !