

# P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

## “Mathematische Modelle in der Technik“

**PS IX** 15.1. 2015 (Zeit : 15<sup>30</sup> – 17<sup>00</sup> Uhr; Raum : K 223B): **23**, **TP V**

### 3 Strömungsmechanik

#### 3.1 Transport-Theorem

**23** Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall  $d = 1$ , d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[ \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(F \cdot v)}{\partial x}(x, t) \right] dx \quad !$$

**TP Va** Die Vektorfunktion  $\varphi : \Omega(t_0) \times (T_1, T_2) \rightarrow R^d$  bildet die Lagrange-Koordinaten  $(X, t)$  auf die Euler-Koordinaten  $(x, t)$  ab, d.h.  $x = \varphi(X, t)$ . Man zeige für  $d = 2$  und  $d = 3$  die Beziehung

$$\frac{\partial D}{\partial t}(X, t) = D(X, t) \operatorname{div}(v(x, t)),$$

wobei  $D$  die Determinante der Jacobi-Matrix der Abbildung  $\varphi$  ist, d.h.

$$D(X, t) = \det \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}(X, t) \right).$$

**TP Vb** Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall  $d = 2$  bzw.  $d = 3$ , d.h. die Formeln

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[ \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(F \cdot v)(x, t) \right] dx$$

und (Gauß-Theorem)

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\partial\omega(t)} F(x, t)(v(x, t), n(x, t)) ds_x \quad !$$

Literaturhinweis: M. Feistauer, *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman Scientific Technical, 1993.