

# P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

## “Mathematische Modelle in der Technik“

**PS III** 13.11. 2014 (Zeit : 15<sup>30</sup> – 17<sup>00</sup> Uhr; Raum : K 223B): **09** – **11\***, **TP II**

### 1.5 3D stationäre Wärmeleitprobleme: Allgemeine Bilanzierungstechnik und Greensche Formel (Teamprojekt 2)

- Wir betrachten ein stationäres, 3D Wärmeleitproblem in einem beschränkten Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , das durch Volumenwärmequellen mit der Wärmeintensitätsfunktion  $f(x)$ ,  $x \in \Omega$ , aufgeheizt wird und aus inhomogenem und thermisch allgemein leitendem Material besteht, d.h. die Wärmeleitfähigkeit wird durch einen symmetrischen Wärmeleitensor

$$\Lambda(x) = (\lambda_{ij}(x))_{i,j=1,2,3} = \Lambda^T(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (1.4)$$

beschrieben, der die folgenden Eigenschaften hat:  $\exists \underline{\lambda}, \bar{\lambda} = \text{const} > 0$  :

$$\underline{\lambda} \|\xi\|_{R^3}^2 \leq (\Lambda(x)\xi, \xi)_{R^3} \leq \bar{\lambda} \|\xi\|_{R^3}^2 \quad \forall \xi \in R^3, \forall x \in \Omega \quad (1.5)$$

(Bem.: isotrop:  $\Lambda(x) = \lambda(x)I$ ; orthotrop:  $\Lambda(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))$ ). Auf dem Rand  $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  seien Randbedingungen erster (auf  $\Gamma_1$ ), zweiter (auf  $\Gamma_2$ ) und dritter (auf  $\Gamma_3$ ) Art vorgegeben, wobei  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

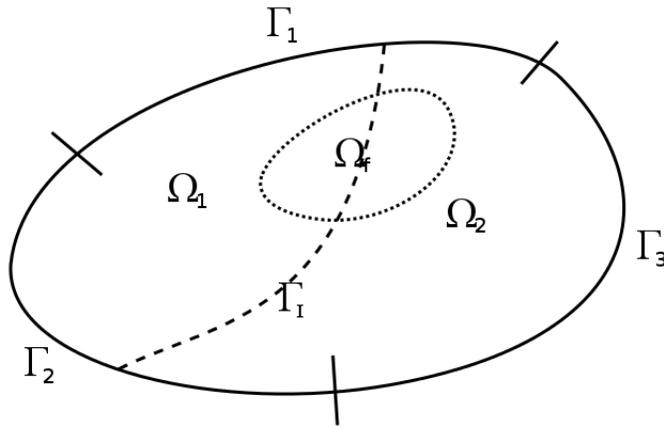
**TP IIa** Wenden Sie die allgemeine Bilanzierungstechnik auf folgendes Wärmeleitproblem an (siehe Abbildung):

Das Rechengebiet besteht aus zwei Materialien, d.h.  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ ,  $\Gamma_I = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$  (Interface),  $\Lambda = \Lambda_i$  in  $\Omega_i$  für  $i = 1, 2$ , die Volumenwärmequelle ist auf dem Teilgebiet  $\Omega_f \subset \Omega$  definiert. Der Rand besteht aus drei Teilen:

- Auf  $\Gamma_1$  sei die Temperatur fix vorgegeben,  $u(x) = g_1(x)$ ,  $x \in \Gamma_1$
- Auf  $\Gamma_2$  sei der Wärmestrom fix vorgegeben,  $\sigma_n(x) = g_2(x)$ ,  $x \in \Gamma_2$
- Auf  $\Gamma_3$  finde freier Wärmeaustausch mit der Umgebung statt,

$$\sigma_n(x) = \alpha(x)(u(x) - g_3(x)), \quad x \in \Gamma_3,$$

wobei  $\alpha$  der Wärmeübergangskoeffizient ist und  $g_3$  die Außentemperatur.



**TP IIb** Leiten Sie die differentielle Form der Wärmeleitgleichung (partielle Differentialgleichung in  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ , Interfacebedingungen, Randbedingungen) ab !

**TP IIc** Leiten Sie aus der partiellen Differentialgleichung in  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ , den Interfacebedingungen und den Randbedingungen die Variationsformulierung her !

## 1.6 Instationäre Wärmeleitprobleme

### 1.6.1 Abkühlung eines Kupferstabes

○ Für einen mantelisierten Kupferstab ( $\rho = 8960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $c = 384 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ ,  $\lambda = 394 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$ ) der Länge  $L = 1 \text{ m}$  mit Durchmesser  $d = 1 \text{ cm}$ , der wärmequellenfrei ( $f = 0$ ) ist, an beiden Rändern mit der gleichen Temperatur  $u_a(t) = u_b(t) = g(t) := 70^\circ\text{C}$  gekühlt wird und für  $t_A = 0$  die Anfangstemperaturverteilung  $u_0(x) = 70^\circ + 40^\circ \sin(\pi x/L)$  besitzt, soll der Temperaturverlauf im Stabmittelpunkt und die Temperatur nach einer Stunde  $t_E = 1 \text{ h}$  ermittelt werden. Beachten Sie die Maßeinheiten.

**09** Modellieren Sie das oben beschriebene instationäre Wärmeleitproblem in integraler Form (Bilanzform).

**10** Leiten Sie die differentielle Form (klassische Formulierung) her. Sind die dafür notwendigen Voraussetzungen erfüllt?

**11\*** Lösen Sie die ARWA aus **10** analytisch und bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt  $t = t_* > 0$  die Temperatur  $u$  im gesamten Stab erstmals kleiner oder höchstens gleich  $80^\circ\text{C}$  ist.