# P R O S E M I N A R

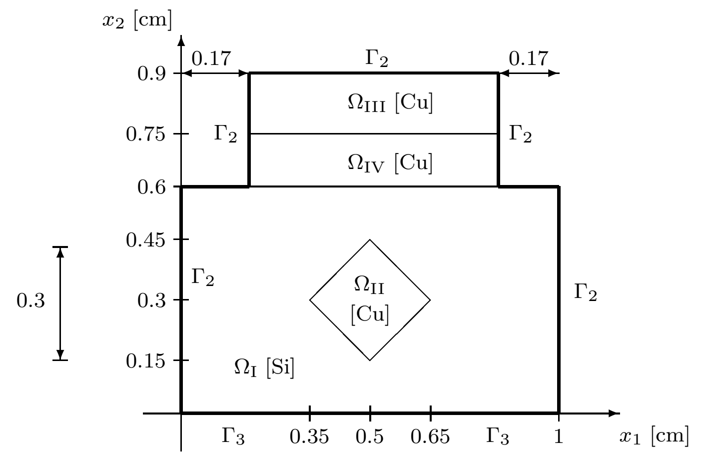
zur Vorlesung

**“Mathematische Modelle in der Technik“**

**PS II** 31.10. 2014 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Raum : S2 044 ): $\boxed{5}$ - $\boxed{8}$, $\boxed{\text{TP I}}$

## 1.3 Wärmeleitung in einer dünnen Platte

○ **Physikalisches Problem :** Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{III}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{IV}}$, in einer dünnen Platte „CHIP“ der Art




mit einer Plattendicke von $d = 0.01$ cm und mit den Daten

– Wärmeleitkoeffizienten

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isotrop}}}{=} \lambda(x) := \begin{cases} \lambda_{\mathrm{Si}} = 0.01 \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}\,K}\right], & x \in \bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \\[2ex] \lambda_{\mathrm{Cu}} = 3.95 \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}\,K}\right], & x \in \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{III}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{IV}} \end{cases}$$

– $a \equiv 0$ (kein Wärmeaustausch in z-Richtung),

– Wärmequellen:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \Omega_{\mathrm{I}} \cup \Omega_{\mathrm{III}}, \\[1ex] 2^k \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}^3}\right], & x \in \Omega_{\mathrm{II}}, \\[2ex] -0.4545454 \cdot 2^k \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}^3}\right], & x \in \Omega_{\mathrm{IV}}, \end{cases}$$

wobei $k$ = letzte Ziffer der Matrikelnummer $\in \{0, 1, \ldots, 9\}$,

– Randbedingungen (RB) auf $\Gamma \equiv \partial\Omega = \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$:

1. $\Gamma_1 = \emptyset$ (keine RB 1. Art),
2. $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma \setminus \Gamma_3$: $\dfrac{\partial u}{\partial N} = g_2 := 0$ auf $\Gamma_2$,

3. $\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 < x_1 < 1,\ x_2 = 0\}$: $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \alpha(g_3 - u)$ auf $\Gamma_3$

mit $g_3 = 300\,K,\ \ \alpha = 0.2\,[W/(\text{cm}^2\,K)]$.

$\boxed{5}$ Man leite die stationäre Wärmeleitgleichung zur Bestimmung der Temperaturverteilung $u(x)$ in der **integralen Form** (= Bilanzform) her.

$\boxed{6}$ Geben Sie die **klassische Formulierung**, d.h. die PDgl. in $\Omega_{\text{I}}$, $\Omega_{\text{II}}$, $\Omega_{\text{III}}$ und $\Omega_{\text{IV}}$, Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_{\text{I}} \cap \bar{\Omega}_{\text{II}}$ und $\bar{\Omega}_{\text{I}} \cap \bar{\Omega}_{\text{IV}}$ sowie die Randbedingungen an.

$\boxed{7}$ Leiten Sie die **Variationsformulierung** in der Form

$$
\begin{aligned}
&\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u,v) = \, < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \qquad (1.1)\\
&\text{d.h.,}\ \ \mathbf{V}_g = ?\\
&\qquad\ \ \mathbf{V}_0 = ?\\
&\qquad\ \ a(u,v) = ?\\
&\qquad\ \ < F, v > = ?
\end{aligned}
$$

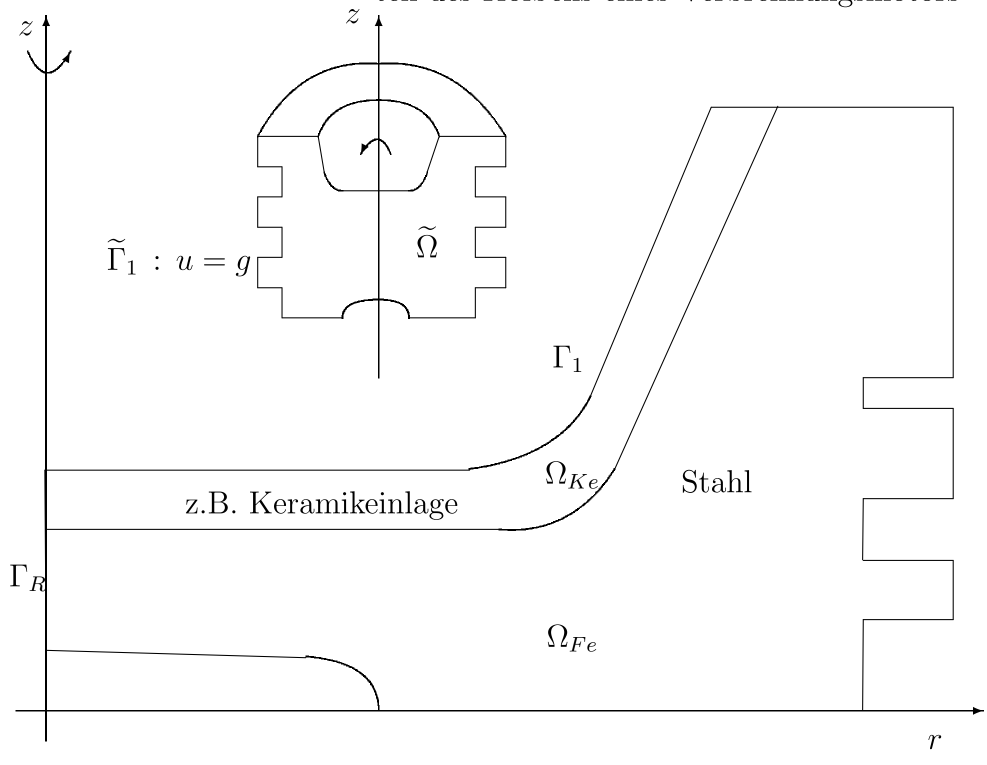
her.

$\boxed{8}$ Man zeige, dass eine hinreichend glatte (genau Angabe der geforderten Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften) Lösung $u \in \mathbf{V}_g$ des Variationsproblems (1.1) das klassische Randwertproblem (d.h. PDgl. in $\Omega_{\text{I}}$, $\Omega_{\text{II}}$, $\Omega_{\text{III}}$ und $\Omega_{\text{IV}}$; Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_{\text{I}} \cap \bar{\Omega}_{\text{II}}$ und $\bar{\Omega}_{\text{I}} \cap \bar{\Omega}_{\text{IV}}$; Randbedingungen) löst !

## 1.4 Weitere 1D und 2D Spezialfälle

### 1.4.1 Rotationssymmetrische Wärmeleitprobleme mit $\varphi$-unabhängigen Eingangsdaten (Teamprojekt 1)

○ Modellproblem "*Kolben*" : Betrachten das Wärmeleitproblem für den Oberteil des Kolbens eines Verbrennungsmotors




unter den Voraussetzungen :

1) $\overline{\widetilde{\Omega}} \;=\; \circlearrowleft^{\varphi}_{z}\, \overline{\Omega} \;:=\; \{ (r,z,\varphi) : (r,z) \in \overline{\Omega},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \} \;=\; \overline{\Omega} \times [0, 2\pi[$ ,
wobei $\Omega = \Omega_{Ke} \cup \Omega_{Fe}$

2) Daten $\{ \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 , f , g , \ldots \}$ sind $\varphi$-unabhängig,

wobei $(x_1, x_2, x_3)$-Kartesische Koordinaten,
$(r, z, \varphi)$ -Zylinderkoordinaten sind.

Die gesuchte Temperaturverteilung $u(x_1, x_2, x_3) = u(r, z)$ ist damit $\varphi$-unabhängig.

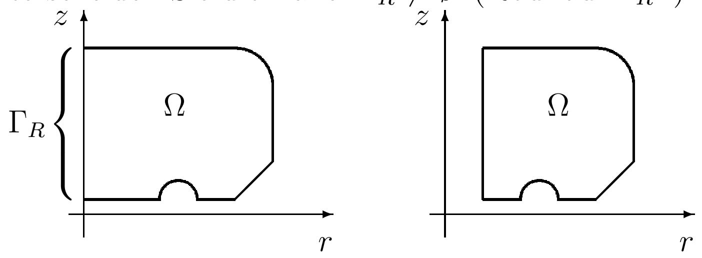
$\boxed{\text{TP Ia}}$ Man schreibe die Wärmeleitgleichung

$$\left.\begin{array}{l}
-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \;=\; f(x) \quad x \in \widetilde{\Omega} \\
\text{mit den Randbedingungen} \\
u \;=\; g_1 \quad \text{auf} \quad \widetilde{\Gamma}_1 \;=\; \Gamma_1 \times [0, 2\pi) \\
-\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \;=\; g_2 \quad \text{auf} \quad \widetilde{\Gamma}_2 \;=\; \Gamma_2 \times [0, 2\pi) \\
-\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \;=\; \alpha(u - g_3) \quad \text{auf} \quad \widetilde{\Gamma}_3 \;=\; \Gamma_3 \times [0, 2\pi)
\end{array}\right\} \tag{1.2}$$

für den rotationssymmetrischen Fall $\overline{\widetilde{\Omega}} = \overline{\Omega} \times [0, 2\pi)$ mit $\varphi$-unabhängigen Eingangsdaten $\{\lambda, f, g_i, \alpha\}$ auf, d.h. durch den Übergang von den kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3)$ zu Zylinderkoordinaten $(r, z, \varphi)$ mittels

$$x_1 \;=\; r \cos \varphi \;, \quad x_2 \;=\; r \sin \varphi \;, \quad x_3 \;=\; z$$

kann der 3D-RWA in $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2D-RWA im Gebiet $\Omega$ zugeordnet werden. Unterscheiden Sie die Fälle $\Gamma_R \neq \emptyset$ (Rbd. auf $\Gamma_R$ !) und $\Gamma_R = \emptyset$ (Gebiet mit Loch).




$\boxed{\text{TP Ib}}$ Man schreibe die differentielle Form der Wärmeleitgleichung für das Modellproblem "*Kolben*" Querschnittsgebiet (2D) auf. Beachten Sie das Vorhandensein eines Interfaces zwischen Stahl und Keramikeinlage (Interface-Bedingung).

$\boxed{\text{TP Ic}}$ Leiten Sie die **Variationsformulierung**

$$\begin{aligned} &\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \\ &\text{d.h.,} \quad \mathbf{V}_g = ? \\ &\qquad\quad \mathbf{V}_0 = ? \\ &\qquad\quad a(u,v) = ? \\ &\qquad\quad < F, v > = ? \end{aligned} \tag{1.3}$$

her !

$\boxed{\text{TP Id}}$ Man zeige, dass eine hinreichend glatte (genaue Angabe der geforderten Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften) Lösung $u \in \mathbf{V}_g$ des Variationsproblems (1.3) das klassische Randwertproblem (d.h. PDgl., Interfacebedingungen, Randbedingungen) löst ! Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang auch die Beziehungen zwischen Integralbilanzformulierung und verallgemeinerte Formulierung !