Differenzenschemata für Wärmeleitgl. (1):

$v(x,t) \approx u(x,t)$, $x = x_i = a + ih$, $i = \overline{0,n}$, $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$

$v_i^j = v(x_i, t_j)$ $\qquad t = t_j = j\tau$, $j = \overline{0,m}$, $\tau = \Delta t = \frac{t_E}{m}$

- **Explizites Euler-Verfahren:** $(2) = (6)_{\theta=0}$

$$(2)\begin{cases} \underbrace{\dfrac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau}}_{=:\, v_{t,i}^j} - \varkappa \underbrace{\dfrac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{h^2}}_{=:\, v_{\bar{x}x,i}^j} = f_i^j := f(x_i, t_j) \quad i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{0,m-1} \\ \text{RB: } v_0^j = u_a(t_j),\ v_n^j = u_b(t_j),\ j = 0,1,\dots,m \\ \text{AB: } v_i^0 = u_0(x_i),\ i = 0,1,\dots,n-1,n \end{cases}$$

- **Implizites Euler-Verfahren:** $(5) = (6)_{\theta=1}$

$$(5)\begin{cases} \dfrac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} - \varkappa \dfrac{v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1}}{h^2} = f_i^{j+1}, \quad j = \overline{0,m-1},\ i = \overline{1,n-1} \\ \text{RB: } v_0^j = u_a(t_j),\ v_n^j = u_b(t_j),\ j = 0,1,\dots,m \\ \text{AB: } v_i^0 = u_0(x_i),\ i = \overline{0,n} \end{cases}$$

- **θ-Verfahren:** $\theta \in [0,1]$

$$(6)\begin{cases} \dfrac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} - \theta \dfrac{v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1}}{h^2} - (1-\theta)\dfrac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{h^2} = \\ \qquad = \theta f_i^{j+1} + (1-\theta) f_i^j,\quad i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{0,m-1} \\ + \text{RB } (\uparrow) + \text{AB } (\uparrow) \end{cases}$$

$\theta = \frac{1}{2}$: CRANK-NICOLSON (Trapezregel)

Fehlerschema für das implizite Euler-Verfahren (5) = (6)$_{\theta=1}$:

$$z_i^{j+1} = z(x_i, t_{j+1}) := \overset{(1)}{u(x_i, t_{j+1})} - \overset{(5)}{v(x_i, t_{j+1})}:$$

$$(7)\quad z^{j+1} := \begin{bmatrix} z_1^{j+1} \\ z_2^{j+1} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{j+1} \end{bmatrix} = z^j - \varkappa \frac{\tau}{h^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{=: A = A^T > 0 \text{ spd}} z^{j+1} + \tau \psi^{j+1}$$

$$\left(I + \varkappa \frac{\tau}{h^2} A\right) z^{j+1} = z^j + \tau \psi^{j+1}$$

$$z^{j+1} = \left(I + \varkappa \frac{\tau}{h^2} A\right)^{-1} z^j + \tau \left(I + \varkappa \frac{\tau}{h^2} A\right)^{-1} \psi^{j+1}$$

$$\|z^{j+1}\| \le \underbrace{\Big\|\big(I + \varkappa \tfrac{\tau}{h^2} A\big)^{-1}\Big\|}_{\le 1}^{\text{spd}} \|z^j\| + \tau \underbrace{\Big\|\big(I + \varkappa \tfrac{\tau}{h^2} A\big)^{-1}\Big\|}_{\le 1} \|\psi^{j+1}\|$$

$$\le \|z^j\| + \tau \|\psi^{j+1}\| \le \ldots \le$$

$$\le \|z^0\| + \tau \left(\|\psi^1\| + \|\psi^2\| + \ldots + \|\psi^{j+1}\|\right)$$

$$\le \underbrace{\|z^0\|}_{\substack{= 0 \\ \text{bzw} = O(\tau + h^2)^{(Rdf)}}} + t_{j+1} \underbrace{\max_{k=1,j+1} \|\psi^k\|}_{= O(\tau + h^2)}$$

$$\le c\, (\tau + h^2)$$

d.h. impl. Euler ist unbedingt stabil!

Fehlerschema für das θ-Verfahren:

Fehler: $z = \overset{(1)}{u} - \overset{(6)}{v}$

(8) $z_{t,i}^{j} - \theta\varkappa\, z_{\bar{x}x,i}^{j+1} - (1-\theta)\varkappa\, z_{\bar{x}x,i}^{j} = \psi_i^{j,\theta}$

mit $\psi_i^{j,\theta} = \theta\psi_i^{j} + (1-\theta)\psi_i^{j+1}$, $\quad i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{0,m-1}$

$+$ RB: $z_0^j = z_n^j = 0$ $\quad$ $+$ AB: $z^0 = 0$ $\quad$ (Rdf !)

Matrixschreibweise:

$$z^{j+1} = z^j - \theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A z^{j+1} - (1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A z^j + \tau\psi_i^{j,\theta}$$

$$\left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)z^{j+1} = \left(I-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)z^j + \tau\psi_i^{j,\theta}$$

$$z^{j+1} = \left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)^{-1}\left(I-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)z^j + \tau\left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)^{-1}\psi^{j,\theta}$$

$$\|z^{j+1}\| \le \underbrace{\left\|\left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)^{-1}\left(I-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)\right\|}_{\le 1\ !}\|z^j\| + \tau\|\psi^{j,\theta}\|$$

$$\boxed{\begin{gathered}\left\|\left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)^{-1}\left(I-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)\right\| \le 1 \\ \Updownarrow \\ -1 \le \frac{1-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)}{1+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)}\end{gathered}}$$

Stabilitätsbedingung:

$$\boxed{-1 \le \frac{1-(1-\theta)\,\varkappa \frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)}{1+\theta\,\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)}}$$

$\theta = 0$: $\quad \varkappa \frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A) \le 2$!

$\theta = \frac{1}{2}$: $\quad -2 - \varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A) \le 2 - \varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)$ ✓

$\theta = 1$: $\quad -1 - \varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A) \le 1$ ✓

θ : $\quad 0 \le 1 + \theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A) + 1 - (1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)$!

$\quad 0 \le 2 - \varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A) + 2\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)$!

$$\theta \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)}$$

RESULTAT:

$\theta = 1$: $\| - " - \| \le 1$ und $\|\psi^k\| \le c(h^2+\tau)$

unbedingt stabil

$\theta = \frac{1}{2}$: $\| - " - \| \le 1$ und $\|\psi^{k,\theta}\| \le c(h^2+\tau^2)$

unbedingt stabil

$\theta = 0$: bedingt stabil und $\|\psi^k\| \le c(h^2+\tau)$

$$\tau \le \frac{h^2}{\varkappa}\frac{2}{\lambda_{max}(A)} \approx \frac{h^2}{2\varkappa}$$

Hyperbolischer Fall: d.h. Saitenschwingung $(N-2)$

$\Longrightarrow$ Rein implizites Schema ist unbedingt stabil!

$\Longrightarrow$ Diskrete Konvergenz: $\|z^{j+1}\| \le c(u)(\tau^2+h^2)$