

Approximation + Stabilität \Rightarrow diskrete Konvergenz

Btr. Wärmeleitgleichung (A-M):

$u(x,t) := T(x,t):$

(1)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) & \forall x \in (a,b), \forall t \in (0,t_E) \\ \text{RB: } u(a,t) = u_a(t), u(b,t) = u_b(t), & \forall t \in (0,t_E) \\ \text{AB: } u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in [a,b] \end{cases}$$

$\alpha = \lambda / \rho c$

Differenzenschema:

$V(x,t) \approx u(x,t)$ $x = x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$
 $V_i^j = V(x_i, t_j)$ $t = t_j = j\tau, j = \overline{0, m}, \tau = \Delta t = t_E/m$

(2)
$$\begin{cases} \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} - \alpha \frac{V_{i-1}^j - 2V_i^j + V_{i+1}^j}{h^2} = f_i^j := f(x_i, t_j) \\ \text{RB: } V_0^j = u_a(t_j), V_n^j = u_b(t_j), j = 0, 1, \dots, m \\ \text{AB: } V_i^0 = u_0(x_i), i = \overline{0, n} \end{cases}$$

Fehlerschema $z_i^j = z(x_i, t_j) := u(x_i, t_j) - V(x_i, t_j)$

$$\begin{aligned} z_{t,i}^j - \alpha z_{xx,i}^j &= u_{t,i}^j - \alpha u_{xx,i}^j - (V_{t,i}^j - \alpha V_{xx,i}^j) = \\ &= \frac{u(x_i, t_j + \tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} - \alpha \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j))}{h^2} - \underbrace{(V_{t,i}^j - \alpha V_{xx,i}^j)}_{\stackrel{(2)}{=} f_i^j = f(x_i, t_j)} \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right]}_{= f(x_i, t_j)} = \psi_i^j \end{aligned}$$

Folie Ü1/02

$$\psi_c^j = \psi(x_i, t_j) = \left[\frac{u(x_i, t_j + \tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \right] = O(\tau)$$

$$- \alpha \left[\frac{u(x_i - h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i + h, t_j))}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right] = O(h^2)$$

(3) $= O(\tau + h^2)$ = Approximationsfehler
(Konsistenzfehler)

Resultat:

(4)

$$z_{t,i}^j - \alpha z_{xx,i}^j = \psi_c^j := O(\tau + h^2)$$

RB: $z_0^j = z_n^j = 0 \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, M$

AB: $z_i^0 = u(x_i, t_0) - v_i^0 = 0, \quad i = \overline{0, n}$

$$z_{t,i}^j = \alpha z_{xx,i}^j + \psi_c^j$$

(4)
$$z_i^{j+1} = z_i^j + \alpha \frac{\tau}{h^2} [z_{i-1}^j - 2z_i^j + z_{i+1}^j] + \tau \psi_c^j$$

 $i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, M-1}$

(4)
$$z^{j+1} := \begin{pmatrix} z_1^{j+1} \\ z_2^{j+1} \\ \vdots \\ z_{n-2}^{j+1} \\ z_{n-1}^{j+1} \end{pmatrix} = z^j - \alpha \frac{\tau}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} z^j + \tau \psi^j$$

Analysis der Fehlerfortpflanzung:1. Heuristisch (nicht Korrekt !!)

X

$$z_c^{j+1} = z_c^j + \tau \frac{\tau}{h^2} [\cancel{z_{c-1}^j} - 2z_c^j + \cancel{z_{c+1}^j}] + \tau \varphi_c^j$$

$$z_c^{j+1} = \underbrace{(1 - 2\tau \frac{\tau}{h^2})}_{=: q} z_c^j + \tau \varphi_c^j$$

$$\begin{aligned} z_c^{j+1} &= q z_c^j + \tau \varphi_c^j \\ &= q (q z_c^{j-1} + \tau \varphi_c^{j-1}) + \tau \varphi_c^j \\ &= \dots \\ &= q^{j+1} z_c^0 + \tau (q^j \varphi_c^0 + q^{j-1} \varphi_c^1 + \dots + \varphi_c^j) \end{aligned}$$

Stabilität $\Leftrightarrow |q| \leq 1$ ($\Downarrow q = 1.1, j = 999, q^j \approx 10^{49}$)

Falls

$$(*) \quad ? \quad |q| = |1 - 2\tau \frac{\tau}{h^2}| \leq 1 \quad ? \quad (d)$$

dann gilt

$$\begin{aligned} |z_c^{j+1}| &\leq |z_c^0| + \tau \sum_{k=0}^j \max_{K=0,1} |z_c^k| \\ &\quad \text{Rundungsfehler (RdF)} \qquad \qquad \qquad = O(\tau + h^2) \\ &\leq c (\tau + h^2) \end{aligned}$$

Allerdings: Heuristik & Stabilitätsbed. stimmt noch nicht ganz!

2. Mathematisch Korrekt!

$$z^{j+1} = \left(I - \alpha \frac{\Gamma}{h^2} \begin{bmatrix} & & \\ & -1 & -1 \\ & & \end{bmatrix} \right) z^j + \tau \psi^j \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\|z\| \stackrel{\text{z.B.}}{=} \|z\|_{\mathbb{R}^{n-1}} := \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (z_i)^2}, \quad z \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \|z^{j+1}\| &\leq \| (I - \alpha \frac{\Gamma}{h^2} A) z^j \| + \tau \| \psi^j \| \\ &\leq \underbrace{\| I - \alpha \frac{\Gamma}{h^2} A \|}_{=: q} \|z^j\| + \tau \| \psi^j \| \end{aligned}$$

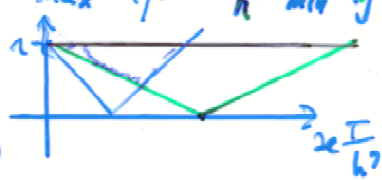
$$\begin{aligned} \|z^{j+1}\| &\leq q \|z^j\| + \tau \| \psi^j \| \leq \dots \leq \\ &\leq q^{j+1} \|z^0\| + \tau (q^j \| \psi^0 \| + q^{j-1} \| \psi^1 \| + \dots + \| \psi^j \|) \\ &\leq \|z^0\| + \tau \sum_{k=0}^j \underbrace{\max_{k=0,1} \| \psi^k \|}_{O(\tau+h^2)} \leq c(\tau+h^2) \end{aligned}$$

↑ Rdf

Stabilitätsbed.: $q = \| I - \alpha \frac{\Gamma}{h^2} A \| \leq 1$

$$q = \| I - \alpha \frac{\Gamma}{h^2} A \| \stackrel{!}{=} \max \left\{ \left| 1 - \alpha \frac{\Gamma}{h^2} \lambda_{\max}(A) \right|, \left| 1 - \alpha \frac{\Gamma}{h^2} \lambda_{\min}(A) \right| \right\}$$

Spektralnorm



$\lambda_{\min/\max} = \text{real/max EW} : A \varphi = \lambda \varphi$

$$\begin{aligned} q < 1 &\Leftrightarrow \left| 1 - \alpha \frac{\Gamma}{h^2} \lambda_{\max}(A) \right| \leq 1 \quad \checkmark \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 1 - \alpha \frac{\Gamma}{h^2} \lambda_{\max}(A) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq -\alpha \frac{\Gamma}{h^2} \lambda_{\max}(A) \\ &\Leftrightarrow \tau \leq \frac{h^2}{2\alpha} \left(2 / \lambda_{\max}(A) \right) \end{aligned}$$


```

9 %Aufruf des Algorithmus zur Berechnung der Temperaturverteilung
10 %T Temperaturmatrix
11 %time...Zeitpunkt für den gilt T=40°C im gesamten Stab
12 [T,time]=calc_T(time_end,m,n);
13

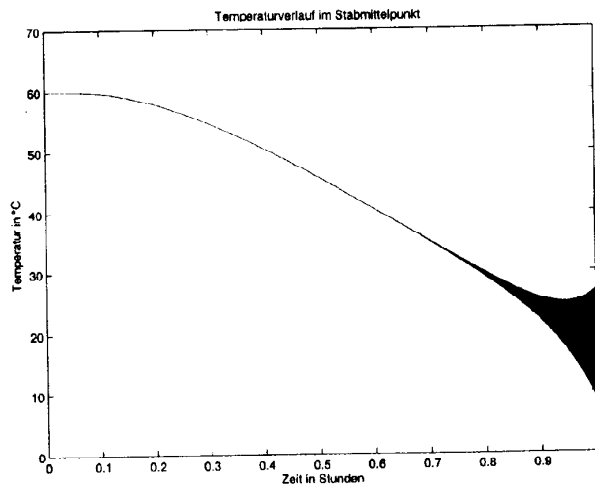
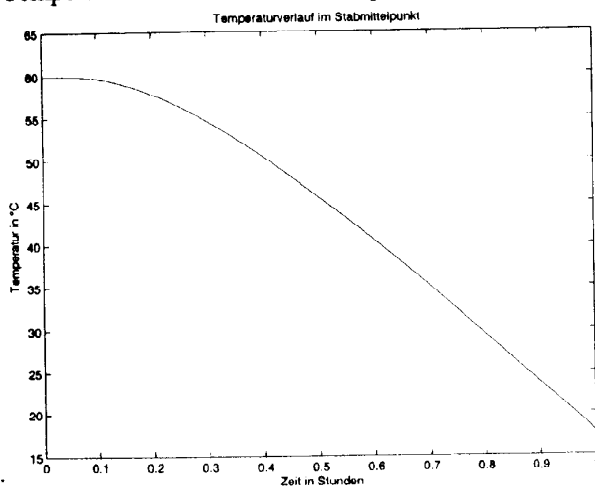
```

Folie Ü1/06

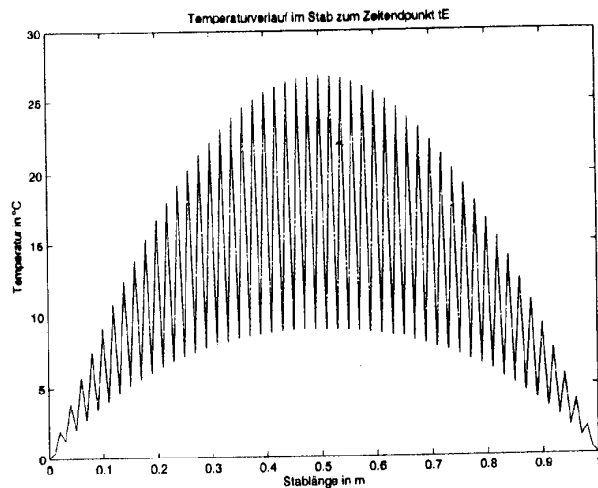
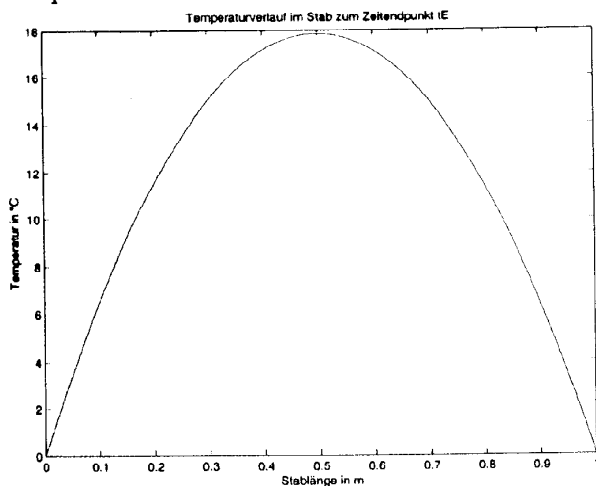
Ergebnisse:

Mit den zwei gewählten Diskretisierungen werden folgender Temperaturverläufe berechnet:
 $m=9000, n=100, \text{time_end}=3600$ Sekunden (Diagramme links): stabile Lösung
 $m=8235, n=100, \text{time_end}=3600$ Sekunden (Diagramme rechts): aufschwingende Lösung
 Diese Werte wurden gewählt um einerseits eine stabile Lösung und andererseits den Effekt des Aufschwingvorganges zu zeigen.

Temperaturverlauf im Stabmittelpunkt im berechneten Zeitintervall:



Temperaturverlauf im Stab nach einer Stunde $t_E=1h$



Temperaturverteilung T wenn im gesamten Stab $T \leq 40^\circ\text{C}$:

stabil

nicht stabil