Prüfungsfragen

1. Modellieren Sie ein örtlich eindimensionales, instationäres Wärmeleitproblem und lösen Sie es numerisch mit dem Differenzenverfahren ! Was können Sie über Approximation, Stabilität und Konvergenz aussagen ?

2. Wie würden Sie das folgende örtlich eindimensionale Schwingungsproblem numerisch lösen ? Gesucht ist *u(x,t):*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,1) \times (0,T] \tag{1}$$

unter den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T] \tag{2}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in [0,1]. \tag{3}$$

3. Man löse die Zweipunkterandwertaufgabe

$$-u''(x) + a(x)u(x) = f(x) \;\; \forall x \in (0,1), \quad u(0) = 1 \text{ und } u'(1) = 1$$

mit der Methode der finiten Elemente ! Was wissen Sie über den Diskretisierungsfehler ?

4. In der Praxis werden Integrale der Form

$$\int_a^b g(x)dx$$

numerisch berechnet. Erklären Sie die Gauß-Formeln Gauß-k und leiten Sie eine Fehlerabschätzung für die Mittelpunktsregel (= Gauß-1 = einfachste Gauß-Formel (k=1)) her !

5. Was verstehen Sie unter einem Lagrangschen Interpolationspolynom und wie kann man es zur numerischen Integration nutzen ? Erläutern Sie die Newton-Cotes-Formeln !

6. Wie würden Sie ein Gleichungssystem mit einer tridiagonalen Systemmatrix auflösen? Unter welchen Bedingungen können Sie die Durchführbarkeit und die Stabilität des Algorithmus garantieren ?

7. Geben Sie die Variationsformulierung des vom Prüfer ad hoc gegebenen 1D stationären Wärmeleitproblems an und lösen Sie es numerisch mit der Methode der finiten Elemente !

8. Erklären Sie die FEM-Technologie (elementweiser Aufbau der Steifigkeitsmatrix K_h und des Lastvektors $\underline{f}_h$ + Einbau der Randbedingungen) zur Generierung das FEM-Gleichungssystems $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ an Hand des Beispiels
$$-u''(x) = f(x),\ x \in (a,b),\ u(a) = g_a,\ -u'(b) = \alpha_b(u(b) - g_b) \tag{4}$$
aus der Vorlesung.

9. Zeigen Sie, dass das Variationsproblem
$$\text{Ges. } u \in V_g :\ a(u,v) = \langle F, v \rangle\ \forall v \in V_0 \tag{5}$$
äquivalent zum Energieminimierungsproblem
$$\text{Ges. } u \in V_g :\ J(u) = \min_{w \in V_g} J(w) := \frac{1}{2} a(w,w) - \langle F, v \rangle \tag{6}$$
ist, falls die Bilinearform $a(.,.)$ symmetrisch und positiv ist. Was verstehen Sie unter dem Galerkin- und dem Ritz-Verfahren ?

10. Was verstehen Sie unter einer Triangularisierung eines Rechengebietes Ω ? Welche Informationen zur Representation eines Netzes werden durch einen Netzgenerator generiert ?

11. Erklären Sie die FEM-Technologie (elementweiser Aufbau der Steifigkeitsmatrix K_h und des Lastvektors $\underline{f}_h$ + Einbau der Randbedingungen) zur Generierung das FEM-Gleichungssystems $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ an Hand des 2D Beispiels
$$-\frac{\partial}{\partial x_1}(\lambda_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\lambda_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)) + a(x)u(x) = f(x),\quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \tag{7}$$
mit Randbedingungen 1., 2. und 3. Art auf den Randstücken Γ_1, Γ_2 und Γ_3 von $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ aus der Vorlesung.

12. Geben Sie die Variationsformulierung des vom Prüfer ad hoc gegebenen 2D stationären Wärmeleitproblems an und lösen Sie es numerisch mit der Methode der finiten Elemente !

13. Bei der Diskretisierung von elliptischen Randwertaufgaben zweiter Ordnung durch die FEM entstehen Gleichungssysteme der Art $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ zur Bestimmung des Vektors der Knotenwerte $\underline{u}_h$, wobei K_h die Steifigkeitsmatrix und $\underline{f}_h$ den Lastvektor bezeichnen. Welche Eigenschaften haben diese Gleichungssysteme ? Wie würden Sie diese Gleichungssysteme auflösen ?

14. Wie würden Sie zeitabhängige Probleme, d.h. Anfangsrandwertaufgaben für parabolische und hyperbolische partielle Differentialgleichungen diskretisieren, wenn Sie zur Ortsdiskretisierung die FEM verwenden wollen ?

15. Erklären Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren ! Zeigen Sie, dass das Gaußsche Eliminationsverfahren zur LU-Zerlegung äquivalent ist ! Wieviele arithmetische Operationen benötigt das Gaußsche Eliminationsverfahren für eine vollbesetzte Matrix und wieviele arithmetische Operationen für eine Bandmatrix mit der Bandweite m ?

16. Welche Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ kennen Sie ? Erklären Sie diese Iterationsverfahren !

17. Erklären Sie das (vorkonditionierte) Richardson-Verfahren ? Wie können Sie die klassischen Iterationsverfahren als vorkonditionierte Richardson-Verfahren interpretieren ? Was wissen Sie über die Konvergenz des Richardson-Verfahrens ?

18. Erklären Sie das Gradientenverfahren und das konjungierte Gradientenverfahren ! Was verstehen Sie unter einer Vorkonditionierung ?

19. Klassifizieren Sie die Optimierungsprobleme und erläutern Sie die theoretischen Grundlagen zu den freien Optimierungsproblemen !

20. Erklären Sie Abstiegsverfahren, Newton-Verfahren und Quasi-Newtonverfahren zur Lösung freier Optimierungsprobleme der Form: Gesucht ist $x^* \in R^n$:
$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x) \; ! \tag{8}$$

21. Was wissen Sie über die Konvergenz und die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme der Form: Gesucht ist $x^* \in R^n$: $F(x^*) = 0$ in R^n ?

22. Klassifizieren Sie die Optimierungsprobleme und erläutern Sie die theoretischen Grundlagen zu den restringierten Optimierungsproblemen !

23. Wie würden Sie ein restringierten Optimierungsproblem der Form
$$\min_{x \in R^n} f(x) \tag{9}$$
$$\text{s.t. } c_i(x) = 0, \; i = 1, 2, ..., m \tag{10}$$
mit Nebenbedingungen in Gleichungsform lösen ?

24. Wir betrachten das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem
$$\min_{\substack{y \in H_0^1(\Omega) \text{ und } u \in L_2(\Omega), \\ \text{s.t. } \int_\Omega \lambda \nabla y(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx, \; \forall v \in H_0^1(\Omega)}} \int_\Omega |y(x) - y_d(x)|^2 \, dx + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega (u(x))^2 \, dx \tag{11}$$
mit dem beschränkten Rechengebiet $\Omega \subset R^2$, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$, dem gegebenen Temperaturprofil $y_d \in L_2(\Omega)$ und dem Regularisierungsparameter (= Parameter zur Bewertung der Kosten der Steuerung) α. Die Zustandsgleichung ist nichts anders als die Variationformulierung des Wärmeleitproblems
$$\begin{aligned} -\text{div}(\lambda \nabla y(x)) &= u(x), \; x \in \Omega, \\ y(x) &= 0, \; x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$
mit der gegebenen (positiven) Wärmeleitzahl λ. Diskretisieren Sie das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem (11) mit linearen finiten Elementen und geben Sie das endlichdimensionale (diskretisierte), restringierte Optimierungsproblem an ! Schreiben Sie die Lagrange-Funktion und das KKT - System (= hier ein lineares Gleichungssystem !) auf !

25. Wie würden Sie ein allgemeines restringierten Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen in Gleichungs- und Ungleichungsform lösen ?