---

73 Die Verfahrensfunktion $\underline{\phi} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ erfülle die Lipschitz-Bedingung

$$\big\| \underline{\phi}(t,\underline{u},\tau_k) - \underline{\phi}(t,\underline{v},\tau_k) \big\| \le \Lambda \|\underline{u} - \underline{v}\| \qquad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \; \forall t \in [0,T] \; \forall \tau_k \in [0,\tau],$$

mit einer positiven Konstante $\Lambda > 0$. Weiters seien für $\underline{u}_0, \underline{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ die Gitterfunktionen $\underline{u}_\tau, \underline{v}_\tau \in X_\tau$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{u}_{k+1} &= \underline{u}_k + \tau_k \underline{\phi}(t_k, \underline{u}_k, \tau_k), \\ \underline{v}_{k+1} &= \underline{v}_k + \tau_k \underline{\phi}(t_k, \underline{v}_k, \tau_k) \end{aligned}$$

für $k = 0, \ldots, m-1$. Man zeige, dass dann gilt

$$\|\underline{u}_k - \underline{v}_k\| \le e^{(t_k - t_\ell)\Lambda} \|\underline{u}_\ell - \underline{v}_\ell\| \qquad \text{für alle } \ell = 0, \ldots, k.$$

74 Man zeige, dass das verbesserte Euler-Verfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\underline{\phi}(t_k, \underline{u}, \tau_k) = \underline{f}\Big(t_k + \frac{\tau_k}{2}, \underline{u} + \frac{\tau_k}{2} \underline{f}(t_k, \underline{u})\Big)$$

die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.

75 Die Funktion $\underline{f} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfülle die Lipschitz-Bedingung

$$\big\| \underline{f}(t,\underline{u}) - \underline{f}(t,\underline{v}) \big\| \le L \|\underline{u} - \underline{v}\| \qquad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \; \forall t \in [0,T]$$

mit einer Konstanten $L > 0$. Für $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ betrachte man die implizite Vorschrift

$$\underline{u}_{k+1} = \underline{u}_k + \tau_k \underline{f}(t, \underline{u}_{k+1}) \qquad \text{für } k = 0, \ldots, m-1. \tag{14.1}$$

Man zeige, dass die Gleichung (14.1) eindeutig nach $\underline{u}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ aufgelöst werden kann, falls die Schrittweite τ_k klein genug ist, i.e. $\tau_k < \frac{1}{L}$ gilt.

76 Sei $V_h \subset V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ der Raum der stetigen und stückweise linearen Funktionen bezüglich einer gegebenen Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ mit den Maschenweiten h_k für $k = 1, \ldots, n_h$. Für die nodalen Basisfunktionen $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_h}$ sei die Massematrix gegeben durch

$$M_h := \left[\int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_i(x) \mathrm{d}x \right]_{i,j=1}^{n_h} \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}.$$

Mit Hilfe der Trapezregel sei weiters eine Approximation der Massematrix gegeben durch

$$\overline{M}_h := \left[\sum_{k=1}^{n_h} \frac{h_k}{2} \big(\varphi_j(x_{k-1}) \varphi_i(x_{k-1}) + \varphi_j(x_k) \varphi_i(x_k) \big) \right]_{i,j=1}^{n_h} \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}.$$

Man zeige, dass die Matrix $\overline{M}_h$ eine Diagonalmatrix ist und dass gilt

$$\big[\overline{M}_h\big]_{i,i} = \sum_{j=1}^{n_h} [M_h]_{i,j} \qquad \text{für } i = 2, \ldots, n_h.$$

Programmierteil.

$\boxed{77}$ Betrachtet werde das gewöhnliche System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} M_h\underline{u}'(t) + K_h\underline{u}(t) &= \underline{f}_h(t) \qquad \text{für } t \in (0,T), \\ M_h\underline{u}(0) &= \underline{g}_h. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Dabei ist $M_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$ die Massematrix und $K_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$ die Steifigkeitsmatrix für eine gegebene Finite Elemente Diskretisierung. Man schreibe eine Routine, welche das explizite Euler-Verfahren für die gegebene Differentialgleichung (14.2) realisiert. Dabei soll es möglich sein die Schrittweite $\tau_k = \tau = \frac{T}{m}$ vorzugeben.

Man beachte dabei, dass in jedem Schritt ein Gleichungssystem gelöst werden muss.

$\boxed{78}$ Betrachtet werde das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) &= 0, \qquad && \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ \frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,1) &= 0 && \text{für } t \in (0,T), \\ u(x,0) &= \cos(\pi x) && \text{für } x \in (0,1). \end{aligned} \tag{14.3}$$

Man verwende die Finite Elemente Methode im Ort um das Anfangs-Randwertproblem (14.3) zu diskretisieren. Dies führt auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form (14.2). Um die gewöhnliche Differentialgleichung (14.2) näherungsweise zu lösen, verwende man das explizite Euler-Verfahren von Aufgabe 77. Dabei wähle man die Maschenweite h und die Schrittweite τ geeignet. Weiters stelle man die Lösungen grafisch dar.

Wie muss die Schrittweite τ in Abhängigkeit zur Maschenweite h gewählt werden, sodass für diese Art von Diskretisierung noch “vernünftige” Lösungen entstehen?