Für die folgenden Aufgaben seinen zwei seperable Hilberträume V und H gegeben, mit den Eigenschaften:

- $V \subset H$ liegt dicht in H.
- Es existiert eine Konstante $c > 0$, mit
$$\|v\|_H \leq c\|v\|_V \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Wir betrachten dann das Variationsproblem: Gesucht ist $u \in H^1((0,T), V; H)$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) &= \langle F(t), v\rangle \qquad && \forall v \in V \quad \forall t \in (0,T) \text{ fast überall,} \\ u(0) &= u_0 && \text{in } H \end{aligned} \tag{13.1}$$

erfüllt ist.

$\boxed{67}$ Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $u \in H^1((0,T), V; H)$ eine Lösung von (13.1) ist, genau dann wenn $u_\lambda \in H^1((0,T), V; H)$ Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_\lambda(t), v)_H + a_\lambda(u_\lambda(t), v) &= \langle F_\lambda(t), v\rangle \qquad && \forall v \in V \quad \forall t \in (0,T) \text{ fast überall,} \\ u_\lambda(0) &= u_0 && \text{in } H \end{aligned} \tag{13.2}$$

ist, mit

$$u_\lambda(t) = e^{-\lambda t}u(t), \qquad a_\lambda(u, v) = a(u, v) + \lambda(u, v)_H, \qquad F_\lambda = e^{-\lambda t}F(t).$$

$\boxed{68}$ Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine V-beschränkte Bilinearform. Man zeige, falls eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass die Gårding-Ungleichung

$$a(v, v) + \lambda\|v\|_H^2 \geq c_1^a\|v\|_V^2 \qquad \forall v \in V,$$

erfüllt ist, dann ist das Problem (13.1) eindeutig lösbar für jedes $F \in L^2((0,T), V^*)$ und $u_0 \in H$.

$\boxed{69}$ Sei $v \in \mathcal{C}^1([0,T], V)$, das heißt es existiert der Grenzwert

$$v'(t) := \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}(v(t+\tau) - v(t)) \in V$$

für alle $t \in [0,T]$, wobei die Funktion $v' : [0,T] \to V$ stetig ist. Man zeige für alle $s, t \in [0,T]$ die Identität

$$\frac{1}{2}(v(t), v(t))_H = \frac{1}{2}(v(s), v(s))_H + \int_s^t (v'(\sigma), v(\sigma))_H \mathrm{d}\sigma.$$

Hinweis: Für $\sigma \in [0,T]$ beweise und verwende man die Identität

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}(v(\sigma), v(\sigma))_H = (v'(\sigma), v(\sigma))_H, \qquad \forall v \in V.$$

$\boxed{70}$ Man zeige, es existiert eine Konstante $c_{tr} > 0$, sodass die Ungleichung

$$\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_H \le c_{tr} \|v\|_{H^1((0,T),V;H)}$$

für alle $v \in \mathcal{C}^1([0,T],V)$ erfüllt ist.

$\boxed{71}$ Sei $V_h \subset V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ der Raum der stetigen und stückweise linearen Funktionen bezüglich einer gleichmäßigen Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ mit der Maschenweite $h > 0$. Für die nodalen Basisfunktionen $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_h}$ seien weiters die Massematrix und die Steifigkeitsmatrix gegeben durch

$$M_h := \left[\int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x\right]_{i,j=1}^{n_h} \quad \text{und} \quad K_h := \left[\int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\mathrm{d}x\right]_{i,j=1}^{n_h}.$$

Für die Matrix $M_h^{-1}K_h$ gebe man eine Abschätzung in der Operatornorm

$$\left\|M_h^{-1}K_h\right\|_{M_h} := \sup_{0\neq \underline{v}_h\in\mathbb{R}^{n_h}} \frac{\left(M_h^{-1}K_h\underline{v}_h, \underline{v}_h\right)_{M_h}}{\left(\underline{v}_h, \underline{v}_h\right)_{M_h}}, \quad \left(\underline{v}_h, \underline{v}_h\right)_{M_h} := \left(M_h\underline{v}_h, \underline{v}_h\right)_{\ell^2} \forall \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$$

an.

Programmierteil.

$\boxed{72}$ Man schreibe eine Assemblier-Routine, die die globale Massematrix M_h von Aufgabe 71 für das reine Neumann-Randwertproblem und dem Rechengebiet (a,b) assembliert. Dazu stelle man die Massematrix analog zur Steifigkeitsmatrix über die lokalen Element-Masse-Matrizen auf.