55 Betrachtet werden die rekursiv definierten Tschebyscheff-Polynome

$$T_0(t) = 1, \qquad T_1(t) = t, \qquad T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t), \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots$$

a) Für $|t| \leq 1$ zeige man die alternative Darstellung

$$T_k(t) = \cos(k \arccos(t)), \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

b) Man berechne die Nullstelen für das k-te Tschebyscheff-Polynom T_k.

56 Wiederum werden die rekursiv definierten Tschebyscheff-Polynome

$$T_0(t) = 1, \qquad T_1(t) = t, \qquad T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t), \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots$$

betrachtet. Für $|t| > 1$ zeige man die alternative Darstellung

$$T_k(t) = \frac{1}{2}\left[(t + \sqrt{t^2-1})^k + (t + \sqrt{t^2-1})^{-k}\right], \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

57 Für $0 < a < b$ betrachte man die Transformation

$$\psi : [a, b] \to [-1, 1] \qquad \text{mit} \quad \psi(x) = \frac{b + a - 2x}{b - a}$$

und die modifizierten Tschebyscheff-Polynome

$$\widetilde{T}_k(x) := \frac{T_k(\psi(x))}{T_k(\psi(0)} \in \mathbb{P}_k \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $T_k \in \mathbb{P}_k$ das k-te Tschebyscheff-Polynom ist, siehe dazu Aufgabe 55 bzw. auch Aufgabe 56. Man zeige für $k \in \mathbb{N}_0$, dass $\widetilde{T}_k \in \mathbb{P}_k$ Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\max_{x\in[a,b]} |\widetilde{T}_k(x)| = \min_{\substack{p\in\mathbb{P}_k \\ p(0)=1}} \max_{x\in[a,b]} |\widetilde{p}(x)|$$

ist.

Hinweis: Man nehme an, dass es ein weiters Polynom $q_k \in \mathbb{P}_k$, $q_k(0) = 1$ gibt, mit

$$\max_{x\in[a,b]} |q_k(x)| < \max_{x\in[a,b]} |\widetilde{T}_k(x)|.$$

Daraus folgere man, dass $r_k := \widetilde{T}_k - q_k \in \mathbb{P}_k$ mindestens $k + 1$ Nullstellen besitzt, indem man das Polynom r_k in den Punkten

$$x_i := \psi^{-1}(t_i), \qquad t_i := \cos(\frac{\ell\pi}{k}) \qquad \text{für} \quad \ell = 0, \ldots, k$$

betrachtet.

58 Gegeben sei die Matrix

$$A = QDQ^\top \in \mathbb{R}^{3n\times 3n} \qquad \text{mit} \quad QQ^\top = I \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N},$$

mit der Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}\{1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3\} \in \mathbb{R}^{3n\times 3n}$. Man zeige, dass das CG-Verfahren für eine beliebige rechte Seite $\underline{f} \in \mathbb{R}^{3n}$ und einem beliebigen Startvektor $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^{3n}$ spätestens nach drei Iterationen die exakte Lösung von $A\underline{x} = \underline{f}$ liefert.

Programmierteil.

59 Man implementiere eine Routine, die das CG-Verfahren für die Klasse `SMatrix` realisiert. Es soll möglich sein, die relative Genauigkeit für das Abbruchkriterium einzustellen bzw. soll es weiters möglich sein, eine maximale Anzahl von Iterationen vorzugeben.

Man teste diese Routine an einem geeignetem Beispiel.

60 Man verwende das CG-Verfahren um das lineare Gleichungssystem von Aufgabe 51 näherungsweise zu lösen. Man stelle die Anzahl der benötigten CG-Iterationen bezüglich der Dimension n_h grafisch dar und vergleiche diese mit den benötigten Iterationen des Gradientenverfahrens.