

- 49 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und indefinite Matrix mit mindestens einem positiven und einem negativen Eigenwert. Man zeige für eine beliebige Schrittweite $\tau \in \mathbb{R}$, dass das Richardson Verfahren

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \tau [\underline{f} - A\underline{x}_k], \quad \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

nicht für jeden beliebigen Startvektor \underline{x}_0 gegen die exakte Lösung \underline{x} des Gleichungssystems $A\underline{x} = \underline{f}$ konvergiert.

- 50 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix die bezüglich dem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) selbstadjungiert ist. Weiters sei $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ eine gegebene Näherungslösung und $\underline{p}_k \in \mathbb{R}^n$ eine gegebene Suchrichtung. Man berechne die Schrittweite $\alpha_k \in \mathbb{R}$, die gegeben ist durch die Minimierungsaufgabe

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} g(\alpha),$$

mit $g(\alpha) := \mathcal{J}_A(\underline{x}_k + \alpha \underline{p}_k)$ und $\mathcal{J}_A(\underline{x}) := \frac{1}{2}(A\underline{x}, \underline{x}) - (\underline{f}, \underline{x})$, $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$.

Programmierteil.

- 51 Gegeben sei das Modellproblem

$$-u''(x) = -2 \text{ für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Man löse dieses Gleichungssystem näherungsweise für eine gleichmäßige Zerlegung mit 2^n , $n = 1, \dots, 10, \dots$ Elementen. Dabei löse man das Gleichungssystem mit dem Richardson Verfahren, wobei man die Schrittweite τ so wählt, sodass das Richardson Verfahren gegen die exakte Lösung konvergiert. Weiters wähle man eine geeignete relative Fehlergenauigkeit $\varepsilon > 0$ und stelle die Anzahl der Iterationen bezüglich der Dimension n_h grafisch dar.

- 52 Man implementiere eine Routine, die das Gradientenverfahren für die Klasse **SMatrix** realisiert. Es soll möglich sein, die relative Genauigkeit für das Abbruchkriterium einzustellen bzw. soll es weiters möglich sein, eine maximale Anzahl von Iterationen vorzugeben.

Man teste diese Routine an einem geeignetem Beispiel.

- 53 Man betrachte das gleiche Modellproblem wie in Aufgabe 51 mit der selben Finite Elemente Diskretisierung. Jedoch verwende man hier das Gradientenverfahren um die auftretenden Gleichungssystem zu lösen. Für die selbe relative Fehlergenauigkeit $\varepsilon > 0$ wie in Aufgabe 51 vergleiche man die Iterationszahlen des Gradientenverfahrens mit den Iterationszahlen des Richardson Verfahrens.

- 54 Man implementiere eine Routine, die es ermöglicht berechnete Lösungen grafisch darzustellen. Zum Beispiel kann man die Lösungen in eine Datei schreiben, die dann von einem anderen Programm eingelesen werden kann.

Zum Beispiel kann das Programm “ParaView” (<http://www.paraview.org/>) verwendet werden um Lösungen darzustellen. Als Dateiformat empfiehlt es sich das “vtk”-Format zu verwenden, siehe <http://www.vtk.org/VTK/img/file-formats.pdf>. In diesem Format können eindimensionale Element als VTK.LINIE oder als VTK.POLY.LINE dargestellt werden.