---

45 Betrachtet werde die Steifigkeitsmatrix $K_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$ vom Modellproblem 1D für eine gleichmäßige Zerlegung $\mathcal{T}_h$, also $h_k = h$ für $k = 1, \ldots, n_h$. Man zeige, dass die in der Vorlesung gezeigt Abschätzung für die Konditionszahl $\kappa(K_h)$ scharf bezüglich der Maschenweite h ist. Das heißt, man zeige die Abschätzung

$$\kappa(K_h) \geq Ch^{-2},$$

mit einer Konstanten $C > 0$, die nicht von der Maschenweite h abhängt.

Hinweis: Man betrachte den Rayleigh-Quotienten für spezielle Vektoren um die extremalen Eigenwerte geeignet abzuschätzen.

46 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Für die Matrix $M_\tau := I - \tau A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ zeige man

$$\|M_\tau\|_{\ell^2} = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |1 - \tau\lambda| = q(\tau),$$

mit $q(\tau) := \max\{|1 - \tau\lambda_{\min}(A)|, |1 - \tau\lambda_{\max}(A)|\}$. Weiters sei die Matrix A zusätzlich indefinit mit mindestens einem positiven und einem negativen Eigenwert. Für diesen Fall zeige man die Abschätzung

$$\|M_\tau\|_{\ell^2} > 1 \qquad \text{für } \tau \neq 0.$$

Programmierteil.

---

47 Für die Klasse `SMatrix` implementiere man die Matrix-Vektor-Multiplikation. Dazu soll der Operator `*` überladen werden, d.h. man implementiere eine Methode der Bauart

```
Vector operator*(const Vector &x) const;
```

welche den Vektor der Matrix-Vektor-Multiplikation zurückgibt. Man teste diese Routine an einem geeigneten Beispiel.

48 Man implementiere eine Routine, die das Richardson Verfahren für die Klasse `SMatrix` realisiert. Es soll möglich sein, die relative Genauigkeit für das Abbruchkriterium einzustellen bzw. soll es weiters möglich sein, eine maximale Anzahl von Iterationen vorzugeben.

Man teste diese Routine an einem geeignetem Beispiel.