---

34 Gegeben sei ein Hilbertraum V mit einem abgeschlossenen Teilraum $V_h \subset V$. Für ein $u \in V$ zeige man, dass die folgenden Problemstellungen äquivalent sind

a) Gesucht ist $u_h \in V_h$, sodass

$$\|u - u_h\|_V = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V .$$

b) Gesucht ist $u_h \in V_h$, sodass

$$(u_h, v_h)_V = (u, v_h)_V \qquad \text{für alle } v_h \in V_h.$$

35 Gegeben sei das Variationsproblem: Gesucht ist $u \in V_0 := \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$, sodass

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \qquad \text{für alle } v \in V_0.$$

Dabei ist die Bilinearform gegeben durch

$$a(u, v) := \int_0^1 [a_0 u'(x)v'(x) + b_0 u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)]\,\mathrm{d}x$$

wobei $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ und $c : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$a_0 > 0, \quad b_0 \geq 0, \quad c(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in (0,1) \quad \text{und} \quad c \in L^\infty(0,1).$$

Die Linearform ist gegeben durch

$$\langle F, v \rangle := \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

mit $f \in L^2(0,1)$. Man zeige, dass die Lösung des Variationsproblems im Sobolev-Raum $H^2(0,1)$ liegt.

36 Gegeben sei der Raum V_0 und die Bilinearform $a : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 35. Für $g \in L^2(0,1)$ wird das duale Problem betrachtet:

$$\text{Gesucht ist } z \in V_0 : \qquad a^*(z, v) = (g, v)_{L^2(0,1)} \qquad \text{für alle } v \in V_0,$$

mit der dualen Bilinearform

$$a^*(u, v) = a(v, u) \qquad \text{für alle } u, v \in V_0.$$

Man zeige, dass die Lösung $z \in V_0$ des dualen Problems in $H^2(0,1)$ liegt. Weiters zeige man, dass die Stetigkeitsabschätzung

$$|z|_{H^2(0,1)} \leq c_S \|g\|_{L^2(0,1)} \qquad \text{mit } c_S > 0$$

erfüllt ist.

$\boxed{37}$ Für $V_g = V_0 = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ seien für $a : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen vom Satz von Lax-Milgram erfüllt. Weiters sei $F \in V_0^*$ und V_h sei der Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen mit dem diskreten Teilraum $V_{0,h} = V_0 \cap V_h$. Weiters sei $u \in V_0$ die Lösung des Variationsproblems:

$$\text{Gesucht ist } u \in V_0 : \qquad a(u,v) = F(v) \qquad \text{für alle } v \in V_0.$$

Für eine Folge von Zerlegungen $\{\mathcal{T}_h\}$ mit $h \to 0$ zeige man für die entsprechenden Näherungslösungen $u_h \in V_{0,h}$, dass gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \to 0 \qquad \text{für } h \to 0,$$

auch wenn $u \notin H^2(0,1)$.

Hinweis: Man verwende die Tatsache, dass der Raum $H^2(0,1)$ dicht in $H^1(0,1)$ liegt und benütze weiters das Lemma von Céa.

Programmierteil.

$\boxed{38}$ Man implementiere eine Routine, die effizient ein lineares Gleichungssystem der Form

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$$

löst. Dabei ist $K_h \in \mathbb{R}^{(n_h+1)\times(n_h+1)}$ eine Tridiagonalmatrix, also vom Typ `SMatrix` und $\underline{f}_h \in \mathbb{R}^{n_h+1}$ ein gegebener Lastenvektor. Siehe dazu auch Übungsaufgabe 28.

Man teste diese Routine für ein geeignetes Gleichungssystem und überprüfe die Richtigkeit der berechneten Lösung $\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{n_h+1}$.

$\boxed{39}$ Man schreibe eine Routine, die den $L^2(a,b)$-Fehler einer berechneten Näherungslösung berechnet. Dazu approximiere man das auftretende Integral mit Hilfe der Mittelpunktsregel, also

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^{n_h} \int_{T_k} |u(x) - u_h(x)|^2 \,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n_h} h_k \,|u(x_k^*) - u_h(x_k^*)|^2 \,,$$

wobei $x_k^* := \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ der Mittelpunkt vom Element $T_k = (x_{k-1}, x_k)$ ist.

Man teste diese Routine für eine gegebene Funktion $u \in \mathcal{C}[a,b]$ und berechne den $L^2(a,b)$-Fehler für die Interpolation $u_h = I_h(u)$ im Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen.