

- 17 Sei V ein Hilbertraum. Weiters sei $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine V -elliptische und V -beschränkte Bilinearform mit dem induzierten linearen Operator $A : V \rightarrow V^*$

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Man zeige für den inversen Operator $A^{-1} : V^* \rightarrow V$ die Beschränktheitsabschätzung

$$\langle A^{-1}F, G \rangle \leq \frac{c_2^a}{(c_1^a)^2} \|F\|_{V^*} \|G\|_{V^*} \quad \text{für alle } F, G \in V^*$$

und die Elliptizitätsabschätzung

$$\langle A^{-1}F, F \rangle \geq \frac{c_1^a}{(c_2^a)^2} \|F\|_{V^*}^2 \quad \text{für alle } F \in V^*.$$

- 18 Seien V und Q Hilberträume. Weiters sei $A : V \rightarrow V^*$ ein linearer, V -elliptischer und V -beschränkter Operator, also

$$\langle Au, v \rangle \leq c_2^a \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{und} \quad \langle Au, u \rangle \geq c_1^a \|u\|_V^2 \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Weiters sei $B : V \rightarrow Q^*$ ein linearer und beschränkter Operator mit der Eigenschaft, dass

$$\sup_{0 \neq v \in V} \frac{\langle Bv, q \rangle}{\|v\|_V} \geq c_S \|q\|_Q \quad \text{für alle } q \in Q.$$

Für den linearen Operator $S := BA^{-1}B^* : Q \rightarrow Q^*$, mit dem adjungierten Operator $B^* : Q \rightarrow V^*$

$$\langle B^*q, v \rangle = \langle Bv, q \rangle \quad \text{für alle } q \in Q, \text{ und alle } v \in V,$$

zeige man die Q -Elliptizität

$$\langle Sq, q \rangle \geq \frac{c_1^a (c_S)^2}{(c_2^a)^2} \|q\|_Q^2 \quad \text{für alle } q \in Q$$

und die Q -Beschränktheit

$$\langle Sp, q \rangle \leq \frac{c_2^a (c_2^b)^2}{(c_1^a)^2} \|p\|_Q \|q\|_Q \quad \text{für alle } p, q \in Q.$$

- 19 Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine V -elliptische und V -beschränkte symmetrische Bilinearform mit den speziellen Konstanten $c_1^a = c_2^a = 1$. Für $F \in V^*$ betrachte man das Variationsproblem:

$$\text{Gesucht ist } u \in V : \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V$$

und die zugehörige Fixpunktiteration

$$u_{k+1} = u_k + \tau \mathcal{R}[F - Au_k] \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0, u_0 \in V \text{ und } \tau = 1.$$

- (a) Was ist der Zusammenhang zwischen der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ und dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_V$?
- (b) Was ist der Zusammenhang zwischen der Riesz-Abbildung $\mathcal{R} : V^* \rightarrow V$ und dem aus der Bilinearform induzierten Operator $A : V \rightarrow V^*$?
- (c) Wieviele Fixpunktiterationen werden benötigt, bis die exakte Lösung angenommen wird?

20 Betrachtet werde das Modellproblem 1D aus der Vorlesung mit $g_0 = 0$: Gesucht ist $u \in V_0 = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$, sodass

$$\langle Au, v \rangle := \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + g_1v(1) =: \langle F, v \rangle$$

für alle $v \in V_0$ erfüllt ist. Man gebe das zur Operatorgleichung

$$w_k = \mathcal{R}[F - Au_k] \quad \text{in } V$$

zugehörige klassische Modellproblem an. Dabei ist $\mathcal{R} : V_0^* \rightarrow V_0$ die Riesz-Abbildung bzgl. dem Raum V_0 .

21 Betrachtet werde das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{=:u} = \underbrace{\begin{pmatrix} ? \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}}_{=:f}$$

mit der Nebenbedingung $u_1 = 3$. Es gibt zwei Möglichkeiten um eine Lösung von diesem linearen Gleichungssystem zu bestimmen:

- (1) *Direkte Methode:*
Man substituiere $u_1 = 3$ in die zweite und dritte Gleichung und reduziere das System auf ein 2×2 System mit den Unbekannten u_2 und u_3 .
- (2) *Variationale Methode:*
Gesucht ist $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ mit $u_1 = 3$, sodass

$$a(\underline{u}, \underline{v}) := \underline{v}^T A \underline{u} = \underline{v}^T \underline{f} =: f(\underline{v})$$

für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = 0$ gilt.

- (a) Man zeige, dass die beiden Methoden äquivalent sind, also (1) \Leftrightarrow (2).
- (b) Kann die Bedingung $v_1 = 0$ vernachlässigt werden?
- (c) Können zusätzliche Bedingungen an \underline{v} gestellt werden?

XX Als Vorbereitung für den nächsten Übungszettel suche man sich einen C/C++ Compiler und einen Editor bzw. eine geeignete Entwicklungsumgebung (Eclipse, Code::Blocks, Visual Studio, ...) nach eigener Wahl. Weiters erstelle man eine Konsolenanwendung, die den folgenden Text ausgibt:

“Numerik ist super!”