

07 Betrachtet werde das Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) && \text{für } x \in (0, 1), \\ u(0) &= g_0, \\ u(1) &= g_1. \end{aligned}$$

Man transformiere dieses Randwertproblem auf eines mit homogenen Randdaten und gebe davon die Variationsformulierung an.

08 Man betrachte die Funktion

$$u(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $u \in L^2(0, 1)$  bzw.  $u \in H^1(0, 1)$ ?

09 Betrachtet werde das Neumann-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) && \text{für } x \in (0, 1), \\ -u'(0) &= g_0, \\ u'(1) &= g_1. \end{aligned}$$

Für dieses Randwertproblem leite man eine Variationsformulierung her:

Gesucht ist  $u \in V_g$ , sodass

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_0 \tag{1.1}$$

erfüllt ist.

Weiters zeige man die folgenden Aussagen.

(a) Falls das Variationsproblem (1.1) eine Lösung besitzt, dann gilt

$$\langle F, c \rangle = 0 \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

(b) Falls  $u \in V_g$  eine Lösung des Variationsproblems (1.1) ist, dann ist  $\hat{u} := u + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  auch eine Lösung.

(c) Für die Wahl  $c = -\int_0^1 u(x)dx$ , gilt

$$\hat{u} \in \hat{V} := \left\{ v \in H^1(0, 1) : \int_0^1 v(x)dx = 0 \right\}.$$

(d) Falls die Bedingung (1.2) erfüllt ist, dann ist die Lösung des Variationsproblems:

Gesucht ist  $\hat{u} \in \hat{V}$ , sodass

$$a(\hat{u}, \hat{v}) = \langle F, \hat{v} \rangle \quad \text{für alle } \hat{v} \in \hat{V}$$

erfüllt ist,

auch eine Lösung des Variationsproblems (1.1).

- 10 Man zeige die Poincaré-Ungleichung: Es existiert eine Konstante  $c_P > 0$ , sodass gilt

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq c_P \left[ |u|_{H^1(0,1)}^2 + \left( \int_0^1 v(x) dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } v \in H^1(0,1).$$

*Hinweis:* Man integriere die Gleichung

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(z) dz$$

bezüglich  $x$  über das Intervall  $(0, 1)$ .

- 11 Man zeige, dass das Variationsproblem (1.1) genau dann eine Lösung besitzt, wenn die Lösbarkeitsbedingung

$$\langle F, c \rangle = 0 \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist. Unter dieser Bedingung zeige man, dass eine Lösung des Variationsproblems (1.1) bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

*Hinweis:* Man verwende die Poincaré-Ungleichung um die  $\hat{V}$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$  zu zeigen.

- 12 Betrachtet werde das zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) && \text{für } x \in (0, 1), \\ -u'(0) &= g_0 - \alpha_0 u(0), \\ u'(1) &= g_1 \end{aligned}$$

zugehörige Variationsproblem mit den geeigneten Räumen  $V_0$  und  $V_g$ . Man zeige für  $\alpha_0 > 0$ , dass die zum Variationsproblem zugehörige Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$   $V_0$ -elliptisch ist.

*Hinweis:* Man verwende die Ungleichung  $\frac{1}{2}\|v\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|v - v(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + |v(0)|^2$  in Kombination mit der Friedrichs-Ungleichung.