P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS XI 30.1. 2014 (Zeit : $10^{\underline{15}} - 11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : S2 044): 32-TP – 35-TP

3.2.2 Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten

32-TP Schreiben Sie die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.43)-(3.44) in Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \tag{3.51}$$

$$y = r\sin\varphi \tag{3.52}$$

$$z = z \tag{3.53}$$

für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ mit den Komponenten v_r, v_φ und v_z in Richtung der Zylinderkoordinaten.

3.2.3 Die Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern (Couette-Taylor Strömung)

In den Übungsaufgaben 37 und 38 soll das Strömungsfeld (= Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ und Druckfeld p) zwischen zwei unendlich ausgedehnten, koaxialen Zylindern mit den Radien R_1 und R_2, die sich mit der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 bewegen, bestimmt werden (siehe Abbildung 3). Zur Lösung dieses Problem bieten sich wieder die Zylinderkoordinaten an. In der Übungsaufgabe 36 haben wir die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.43)-(3.44) in Zylinderkoordinaten für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ mit den Komponenten v_r, v_φ und v_z in Richtung der Zylinderkoordinaten aufgeschrieben. Offenbar ist nur die φ-Komponente v_φ des Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ von 0 verschieden. Des Weiteren hängen v_φ und auch der Druck p offenbar nicht von φ und z ab, d.h.

$$p = p(r) \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_r(r,\varphi,z) \\ v_\varphi(r,\varphi,z) \\ v_z(r,\varphi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\varphi(r) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

Setzt man diesen Ansatz in die, in der Übungsaufgabe 36 abgeleiteten, stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten ein, erhält man einfache zu lösende Bestimmungsgleichungen für $v_\varphi(r)$ und $p(r)$.

33-TP Bestimmen Sie $v(r)$!

34-TP Bestimmen Sie $p(r)$!

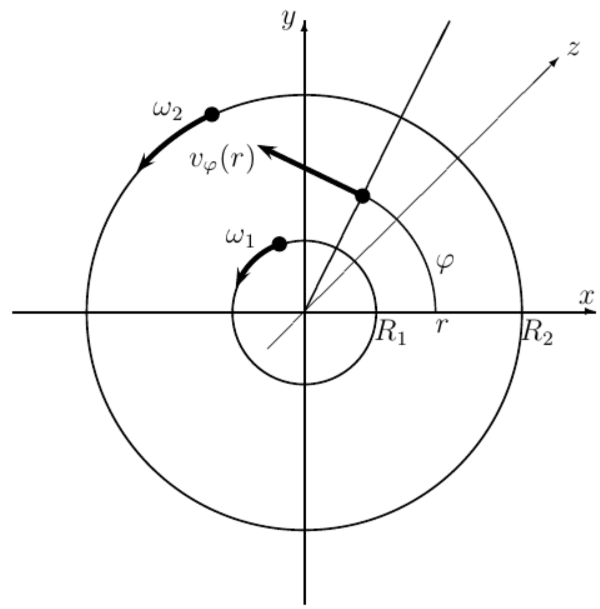


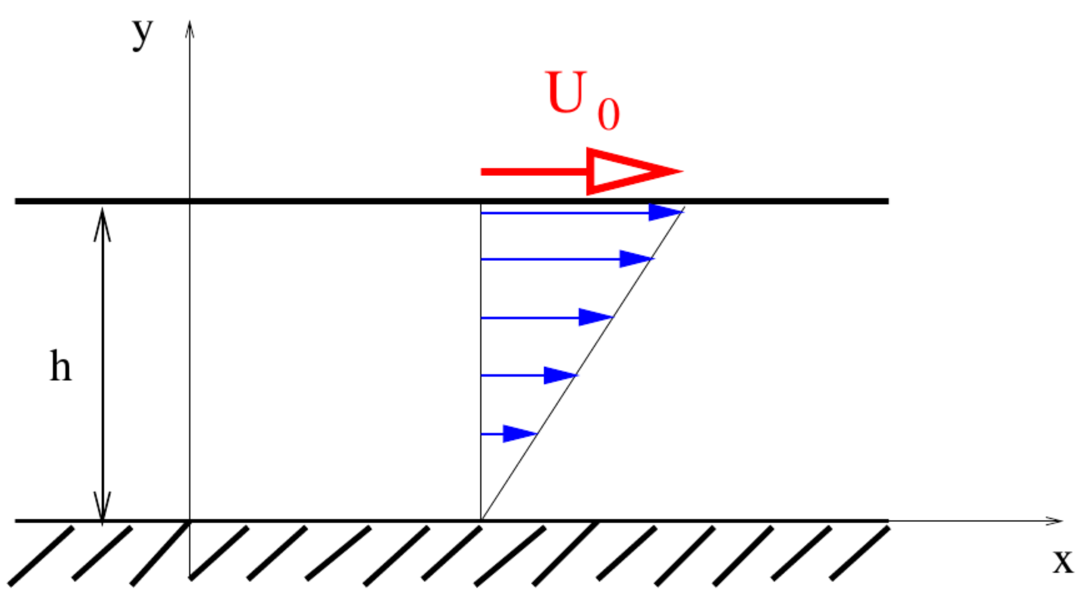
Abbildung 3: Querschnitt durch einen (endlosen) Doppelzylinder mit zwei sich verschieden schnell drehenden Mänteln.

3.2.4 Die Strömung zwischen zwei Platten

35-TP Man berechne das ebene (die Platten seien in Querrichtung genügend weit ausgedehnt) Strömungsfeld eines inkompressiblen Newtonschen Fluids zwischen zwei Platten, wobei sich eine Platte mit der konstanten Geschwindigkeit $U_0 > 0$ parallel zur anderen Platte bewegen möge (siehe Skizze). Die Strömung sei zeitlich und räumlich voll ausgebildet. Bei welcher H_a - Zahl

$$H_a = \frac{-\frac{dp}{dx}(2h)^2}{U_0 \mu}$$

tritt (bezüglich aus der Skizze ersichtlichen x-Richtung (x_1-Richtung)) teilweise Rückströmung auf ?



Hinweise:

1. Gehen Sie von den 3D Navier-Stokes Gleichungen aus:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=f_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}=f_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial z}=f_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

2. Vereinfachen Sie dann diese Gleichungen unter Beruecksichtigung der Annahmen:
   (a) Die Strömung sei zeitlich voll ausgebildet.
   (b) Die Strömung sei räumlich voll ausgebildet.
   (c) Die Strömung sei eben.
   (d) $f := (f_x, f_y, f_z)^T = 0$.

3. Wie sich zeigt, hängt das Strömungsbild vor allem vom Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$ ab. Skizzieren Sie sich einige Geschwindigkeitsprofile und erklären Sie diese anschaulich !