

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS X 23.1. 2014 (Zeit : 10¹⁵ – 11⁴⁵ Uhr; Raum : S2 044): **29** – **31**

3.2 Spezielle Strömungen

3.2.1 Poiseuille Strömung in einem Rohr

Um die Flüssigkeitsmenge

$$Q = \int_{y^2+z^2 \leq R} v(y, z) \rho \, dy \, dz \quad (3.42)$$

zu bestimmen, die pro Sekunde durch den Querschnitt (y - z -Ebene) eines Rohrs (die x -Achse liegt in der Mitte des Rohres) der Länge ℓ mit dem Radius R fließt (siehe Abbildung 2), benötigen wir das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} , das aus den stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} := \mathbf{0} \quad (3.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.44)$$

und der Haftbedingung am Rohrrand hergeleitet werden kann. Es sollen keine äusseren Kräfte wirken, d.h. $\mathbf{f} := \mathbf{0}$. Die Strömung wird nur durch die gegebene Druckdifferenz Δp zwischen den beiden Rohrenden hervorgerufen. Dann hat offenbar die Geschwindigkeit nur eine Komponente in x -Richtung, welche nicht von x abhängt, d.h.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v(y, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

29 Man zeige, dass der Druck die Form

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{\ell} x + c_0 \quad (3.46)$$

hat, wobei $c_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist, und dass $v(y, z)$ die folgende Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichletschen Randbedingungen löst:

$$-\Delta v(y, z) = \frac{\Delta p}{\ell \mu} \quad \forall (y, z) \in (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < R^2, \quad (3.47)$$

$$v(y, z) = 0 \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 = R^2. \quad (3.48)$$

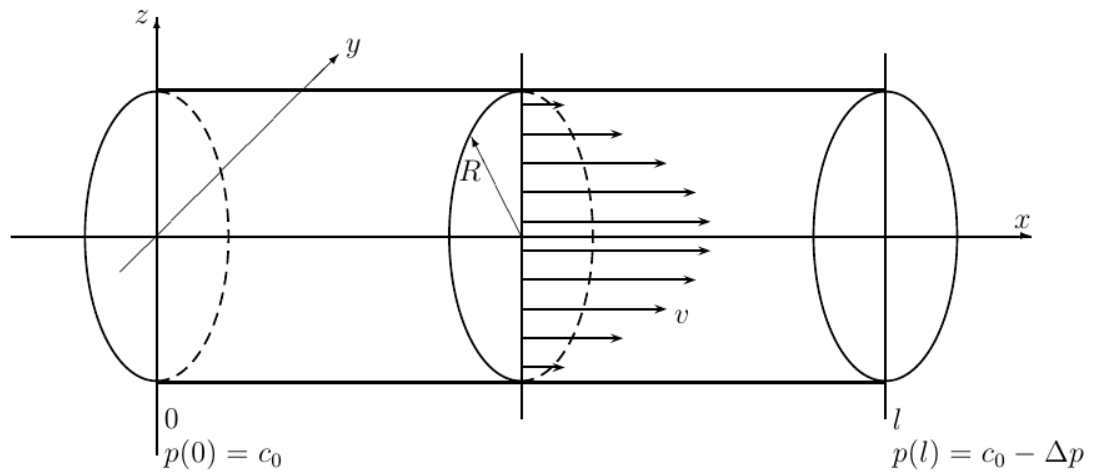


Abbildung 2: Geschwindigkeitsverteilung v einer Flüssigkeit durch ein Rohr.

- 30 Das Randwertproblem (3.47) - (3.48) ist offenbar radialsymmetrisch. Bestimmen Sie die Lösung $v(y, z) = \tilde{v}(r)$, die offenbar nur vom Radius r abhängt, indem Sie das Randwertproblem (3.47) - (3.48) in Polarkoordinaten

$$y = r \cos \varphi \quad (3.49)$$

$$z = r \sin \varphi \quad (3.50)$$

überführen.

- 31 Bestimmen Sie nun die Flüssigkeitsmenge Q , die pro Sekunde durch den Querschnitt des Rohrs fließt !