

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS VII + PS VIII

12.12. 2013 und 09.01. 2014 (Zeit : 10¹⁵ – 11⁴⁵ Uhr;

Raum : S2 044): 23 – 25

- 23** **Der ebene Verzerrungszustand (EVZ) im homogenen und isotropen Fall:**
 Der Körper $\mathcal{K} \in R^3$ habe eine ausgezeichnete Dimension, z.B. in x_3 -Richtung, die wesentlich länger ist als die anderen beiden Richtungen, und konstanten Querschnitt $\Omega \subset R^2$:

$$\mathcal{K} = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 : (x_1, x_2) \in \Omega, -l < x_3 < +l\}$$

mit $l \gg \text{diam}(\Omega)$. Die Volumenkräfte f und Oberflächenkräfte t wirken in der Ebene, die orthogonal zur x_3 -Achse liegt, und sind unabhängig von x_3 , d.h.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t(x) = \begin{pmatrix} t_1(x_1, x_2) \\ t_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \perp \vec{x}_3.$$

Profilträger oder der Staudamm einer Talsperre sind typische Beispiele dafür.

Man leite aus den Beziehungen der 3D Elastizitätstheorie (Kinetik, Kinematik, Hooksches Stoffgesetz, Randbedingungen) die entsprechenden Beziehungen für den EVZ her !

- 24** **Der ebene Spannungszustand (ESZ) im homogenen und isotropen Fall:**
 Wir betrachten jetzt das Deformationsproblem für eine **Scheibe**

$$\mathcal{K} = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 : (x_1, x_2) \in \Omega, -h < x_3 < +h\}$$

mit $h \ll \text{diam}(\Omega)$ unter der Wirkung des x_3 -unabhängigen Kräftefeldes

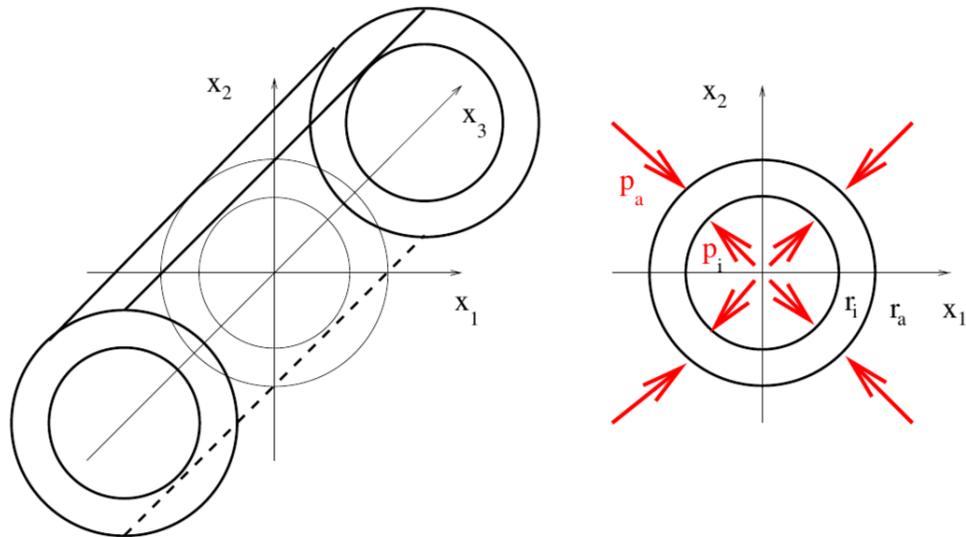
$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t(x) = \begin{pmatrix} t_1(x_1, x_2) \\ t_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, (x_1, x_2) \in \Gamma_t$$

und $t(x_1, x_2, +h) = t(x_1, x_2, -h) = 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$. Der C-Rahmen einer Spritzgussmaschine, den wir uns im Proseminar anschauen werden, ist ein typisches Beispiel dafür.

Man leite aus den Beziehungen der 3D Elastizitätstheorie (Kinetik, Kinematik, Hooksches Stoffgesetz, Randbedingungen) die entsprechenden Beziehungen für den ESZ her !

25 Dickwandiges Rohr unter Innen- und Aussendruck:

Wir betrachten jetzt das Deformationsproblem für eine langes, dickwandiges Rohr mit einem Innenradius r_i und einem Aussenradius r_a unter dem Innendruck p_i und dem Aussendruck p_a (siehe Skizze):



Man leite aus den Beziehungen der 3D Elastizitätstheorie (Kinetik, Kinematik, Hooksches Stoffgesetz, Randbedingungen) ein möglichst einfaches Modell zur Festigkeitsberechnung des Rohres her ! Bestimmen Sie die Lösung ($u_r(r) = ?$, $\sigma_{rr} = ?$, $\sigma_{\phi\phi} = ?$, $\sigma_{r\phi} = ?$) analytisch, falls das möglich ist !

Das folgende Modellierungsprojekt werden wir im Proseminar **gemeinsam** bearbeiten:

○ **Modellierungsproblem Thermomechanik**

In diesem Modellierungsprojekt betrachten wir die Kopplung von thermischen und mechanischen Feldern. Hierbei wird zuerst ein stationäres Temperaturfeld berechnet und weiters die durch den Temperaturgradienten verursachte Verschiebung bestimmt. Somit sind die folgenden Randwertaufgaben zu lösen:

Gesucht ist das Temperaturfeld $T(x)$, für das

$$-\operatorname{div}(\lambda(x) \operatorname{grad} T(x)) = f^T(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

$$T(x) = g_1^T(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1^T,$$

$$\frac{\partial T}{\partial N} = g_2^T(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2^T,$$

$$\frac{\partial T}{\partial N} + \alpha(x)T(x) = \alpha(x)T_A(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_3^T$$

gilt, sowie das Verschiebungsfeld $\vec{u}(x)$, welches das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} -\mu_e \Delta \vec{u}(x) - (\lambda_e + \mu_e) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}(x)) \\ = \vec{f}^e(x) - (3\lambda_e + 2\mu_e) \alpha_\ell(x) \operatorname{grad} T(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \end{aligned}$$

und die Randbedingungen

$$\vec{u}(x) = \vec{g}_1^e(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1^e,$$

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = g_{21}^e(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2^e,$$

$$\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 = g_{22}^e(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2^e,$$

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = g_{23}^e(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2^e$$

erfüllt.

Für den Rand des Gebietes Ω gilt $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_1^T \cup \bar{\Gamma}_2^T \cup \bar{\Gamma}_3^T = \bar{\Gamma}_1^e \cup \bar{\Gamma}_2^e$ mit $\Gamma_i^T \cap \Gamma_j^T = \Gamma_1^e \cap \Gamma_2^e = \emptyset$ für $i, j = 1, 2, 3$. Außerdem bezeichnen $\lambda(x)$ den Wärmeleitkoeffizienten, $\alpha(x)$ die Wärmeübergangszahl, $f^T(x)$ die Intensität der Wärmequelle, $T_A(x)$ die Umgebungstemperatur, λ_e und μ_e die Laméschen Elastizitätskonstanten, $\vec{f}^e(x) = (f_1^e(x) \ f_2^e(x) \ f_3^e(x))^T$ den Vektor der Volumenkraft, $\vec{g}_1^e = (g_{11}^e \ g_{12}^e \ g_{13}^e)^T$ den Vektor der vorgegebenen Randverschiebungen, $\vec{g}_2^e = (g_{21}^e \ g_{22}^e \ g_{23}^e)^T$ den Vektor der vorgegebenen Oberflächenkräfte, α_ℓ den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten und $\vec{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^T$ den Vektor der äußeren Einheitsnormalen. Die Spannungskomponenten bei thermomechanischen Feldern sind

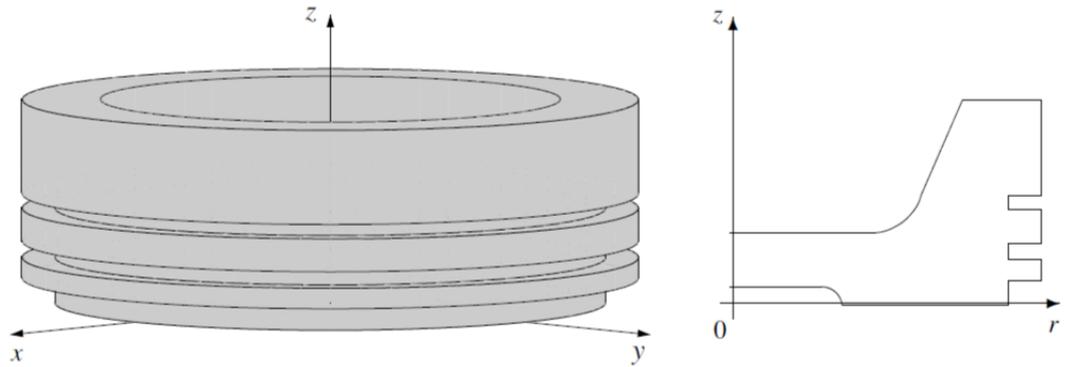


Abbildung 1: Oberer Teil des Kolbens eines Verbrennungsmotors und Meridianebene

durch

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= \lambda_e (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu_e \varepsilon_{ii} - (3\lambda_e + 2\mu_e) \alpha_\ell T, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} = 2\mu_e \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j,\end{aligned}$$

mit den Komponenten ε_{ij} des Verzerrungstensors definiert.

Wir betrachten wieder den Kolben des Verbrennungsmotors aus den Aufgaben [5-TP](#) - [8-TP](#) und betrachten nun zusätzlich zum Temperaturfeld auch das Verschiebungsfeld, das durch die Temperaturänderungen infolge des Verbrennungsprozesses hervorgerufen wird. Wir nehmen an, dass der Kolben rotationssymmetrisch ist und alle Eingangsdaten vom Rotationswinkel unabhängig sind.

Man schreibe das Wärmeleitproblem und das Elastizitätsproblem in Zylinderkoordinaten an.