

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS III

07.11. 2013 (Zeit : 10¹⁵ – 11⁴⁵ Uhr; Raum : S2 044): **09** – **15**

1.5 3D stationäre Wärmeleitprobleme: Allgemeine Bilanzierungstechnik und Greensche Formel (Teamprojekt 2)

- Wir betrachten ein stationäres, 3D Wärmeleitproblem in einem beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, das durch Volumenwärmequellen mit der Wärmeintensitätsfunktion $f(x)$, $x \in \Omega$, aufgeheizt wird und aus inhomogenem und thermisch allgemein leitendem Material besteht, d.h. die Wärmeleitfähigkeit wird durch einen symmetrischen Wärmeleittensor

$$\Lambda(x) = (\lambda_{ij}(x))_{i,j=1,2,3} = \Lambda^T(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (1.4)$$

beschrieben, der die folgenden Eigenschaften hat: $\exists \underline{\lambda}, \bar{\lambda} = \text{const} > 0$:

$$\underline{\lambda} \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}^2 \leq (\Lambda(x)\xi, \xi)_{\mathbb{R}^3} \leq \bar{\lambda} \|\xi\|_{\mathbb{R}^3}^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \Omega \quad (1.5)$$

(Bem.: isotrop: $\Lambda(x) = \lambda(x)I$; orthotrop: $\Lambda(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))$). Auf dem Rand $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ seien Randbedingungen erster (auf Γ_1), zweiter (auf Γ_2) und dritter (auf Γ_3) vorgegeben, wobei $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

09-TP Stellen Sie die Wärmemengebilanzgleichung für ein beliebiges Lipschitz-Teilgebiet G von Ω auf und leiten Sie unter Verwendung des Fourierschen Gesetzes $\sigma = -\Lambda \nabla u$ die Integralbilanzformulierung (Bilanzformulierung) der Wärmeleitgleichung her !

10-TP Leiten Sie unter Verwendung der Greenschen Formel die differentielle Form der Wärmeleitgleichung (klassische Formulierung) her ! Welche Voraussetzungen müssen Sie an die Daten stellen ?

11-TP Wenden Sie nun die allgemeine Bilanzierungstechnik auf ein Wärmeleitproblem, dessen Rechengebiet aus zwei Materialien besteht, d.h. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, $\Gamma_I = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ (Interface), $\Lambda = \Lambda_i$, $f = f_i$ in Ω_i für $i = 1, 2$, an und leiten Sie wieder die differentielle Form der Wärmeleitgleichung (partielle Differentialgleichung in Ω_1 und Ω_2 , Interfacebedingungen, Randbedingungen) ab !

12-TP Leiten Sie dann aus der partiellen Differentialgleichung in Ω_1 und Ω_2 , den Interfacebedingungen und den Randbedingungen die Variationsformulierung her !

1.6 Instationäre Wärmeleitprobleme

1.6.1 Abkühlung eines Kupferstabes

- Für einen mantelisierten Kupferstab $\left(\rho = 8960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad c = 384 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad \lambda = 394 \frac{\text{W}}{\text{mK}}\right)$ der Länge $L = 1 \text{ m}$ und mit Durchmesser $d = 1 \text{ cm}$, der wärmequellenfrei ($f = 0$) ist, an beiden Rändern mit der gleichen Temperatur $u_a(t) = u_b(t) = g(t) := 50^\circ\text{C}$ gekühlt wird und für $t_A = 0$ die Anfangstemperaturverteilung $u_0(x) = 50^\circ + 40^\circ \sin(\pi x/L)$ besitzt, soll der Temperaturverlauf im Stabmittelpunkt und die Temperatur nach einer Stunde $t_E = 1 \text{ h}$ ermittelt werden. Beachten Sie die Masseneinheiten.
- 13** Modellieren Sie das oben beschriebene instationäre Wärmeleitproblem in integraler Form (Bilanzform).
- 14** Leiten Sie die differentielle Form (klassische Formulierung) her. Sind die dafür notwendigen Voraussetzungen erfüllt?
- 15*** Lösen Sie die ARWA aus **14** analytisch und bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt $t = t_* > 0$ die Temperatur u im gesamten Stab erstmals kleiner oder höchstens gleich 60° C ist.